ÚSTŘEDNÍ KOMISE FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY ČESKÉ REPUBLIKY

E-mail: ivo.volf@uhk.cz, tel.: 493 331 190, sekretářka 493 331 189

Řešení úloh krajského kola 54. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie E

Úlohy krajského kola jsou určeny pro zájemce o fyziku, tudíž byly zvoleny tak, aby na jednu stranu mohl skoro každý soutěžící získat alespoň polovinu bodů za každou úlohu, ale zároveň měly také část náročnější, aby bylo možno vytipovat ty nejlepší soutěžící.

Za řešení úloh v krajském kole může řešitel získat celkem 40 bodů, přičemž úspěšným řešitelem se stává ten soutěžící, který bude hodnocen alespoň ve dvou úlohách nejméně 5 body a v celkovém hodnocení dosáhne alespoň 14 bodů.

1. FO54E1: Víkend na chatě

a) Otec a matka vyrazili v 12:25 na chatu pěšky rychlostí 4,5 km/h po trase 9,0 km. Cesta jim tedy trvala čas $t_1 = 9/4{,}5\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h}$ a na chatu dorazili ve 14:25. Katka a Vašek vyrazili v 10:00 rychlostí 4,5 m/s a museli urazit 65 km = 65 000 m. Cesta jim tedy trvala $t_2 = 65\,000/4{,}5\,\mathrm{s} = 14\,444\,\mathrm{s} \doteq 4\,\mathrm{h}$. Dorazili tak ve 14:00, dříve než rodiče. **4 body**

b) Přítel vyrazil v 11:30 rychlostí 7,5 m/s a musel urazit 65 km = 65 000 m. Cesta mu tedy trvala dobu $t_3 = 65\,000/7{,}5\,\mathrm{s} = 8\,667\,\mathrm{s} \doteq 2{,}4\,\mathrm{h}$. Na chatu by uvedenou rychlostí přijel asi v čase $11{,}5\,\mathrm{h} + 2{,}4\,\mathrm{h} = 13{,}9\,\mathrm{h}$, tj. ve 13:54, což znamená, že Katku dojel ne moc daleko od chaty (čas setkání vychází 13:45 minut, 15 min neboli 900 s by Katka ujela $4{,}5 \cdot 900\,\mathrm{m} = 4\,050\,\mathrm{m}$, takže přítel ji dohonil asi 4 km před chatou). **3 body**

c) Délka cesty tam a zpět je 18,0 km a povolená rychlost na cestě je nejvýše 30 km/h, doba opravy byla 45 min = 0,75 h. Celková doba, za kterou se mohli nejdříve vrátit na chatu vychází

$$t_4 = \frac{18}{30}\,\mathrm{h} + 0{,}75\,\mathrm{h} = 1{,}35\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}\,21\,\mathrm{min}.$$

Tatínek s opravářem se mohou vrátit nejdříve v 16 h 21 min. **3 body**

2. FO54E2: Těžba dřeva

a) Poloměry kruhových stran kmene jsou $R = 44/2\,\mathrm{cm} = 0{,}22\,\mathrm{m}$, $R = 24/2\,\mathrm{cm} = 0{,}12\,\mathrm{m}$ Objem jednoho kmenu je

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 16\cdot\left(0{,}22^2 + 0{,}22\cdot 0{,}12 + 0{,}12^2\right)\ \mathrm{m}^3 \doteq 1{,}5\,\mathrm{m}^3.$$

Hmotnost kmene je dána vztahem $m = \varrho V$, pro suchý kmen vychází $m_\mathrm{s} = \varrho_\mathrm{s} V = 1{,}5\cdot 480\,\mathrm{kg} = 720\,\mathrm{kg}$. Hmotnost mokrého kmene pak byla $m_\mathrm{m} = \varrho_\mathrm{m} V = 1{,}5\cdot 640\,\mathrm{kg} = 960\,\mathrm{kg}$. **2 body**

b) Země působí na kmen tíhovou silou $F_\mathrm{G} = mg$. Proti pohybu působí země silou třecí $F_\mathrm{t} = fmg$. Na kmen je třeba působit minimálně stejně velikou silou $F = fmg$, pro suchý kmen vychází $F_1 = fm_\mathrm{s}g = 0{,}25 \cdot 720 \cdot 10\,\mathrm{N} = 1{,}8\,\mathrm{kN}$, pro mokrý kmen vychází $F_2 = fm_\mathrm{m}g = 0{,}25 \cdot 960 \cdot 10\,\mathrm{N} = 2{,}4\,\mathrm{kN}$. **2 body**

c) Do délky vozu se kmeny vejdou právě jednou, do výšky lze dát pět vrstev, do šířky se vejde při dobrém narovnání (střídají se užší a širší konce $(0{,}24 + 0{,}44 + 0{,}24 + 0{,}44 + 0{,}24 + 0{,}44)\,\mathrm{m} = 2{,}04\,\mathrm{m}$) až 6 kmenů, při horším narovnání (všechny širší konce na jedné straně vozu $(0{,}44+0{,}44+0{,}44+0{,}44)\,\mathrm{m} = 1{,}76\,\mathrm{m}$) jen 4 kmeny. Při dobrém narovnání se vejde do jednoho vozu celkem $6 \cdot 5 = 30$ kmenů o celkové hmotnosti 21,6 t (pro suché dřevo). K odvezení 60 kmenů proto stačí dva vozy, budou oba zcela naplněny. Při horším narovnání se vejde do jednoho vozu celkem $4 \cdot 5 = 20$ kmenů o celkové hmotnosti 14,4 t (opět pro suché dřevo). Dva vozy pak nestačí, musíme použít 3 vozy. **3 body**

d) Pro plovoucí kmen bude platit, že velikost tíhové síly, kterou působí Země na kmen o objemu V a hustotě ϱ, je stejná, jako velikost vztlakové síly, kterou působí voda o hustotě ϱ_v. Pro objem ponořené části tělesa V_p platí

$$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{vz}, \qquad V\varrho g = V_\mathrm{p}\varrho_\mathrm{v} g,$$
$$\frac{V_\mathrm{p}}{V} = \frac{\varrho}{\varrho_\mathrm{v}}.$$

Pro suché dřevo vychází

$$\frac{V_\mathrm{p}}{V} = \frac{\varrho_\mathrm{s}}{\varrho_\mathrm{v}} = \frac{480\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}48\,\%,$$

pro mokré dřevo

$$\frac{V_\mathrm{p}}{V} = \frac{\varrho_\mathrm{m}}{\varrho_\mathrm{v}} = \frac{640\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}64\,\%,$$

3 body

3. FO54E3: Malá, avšak důležitá místnost Rozměry nádoby převedeme na metry: $4{,}00\,\mathrm{dm} = 0{,}4\,\mathrm{m}$, $12{,}5\,\mathrm{cm} = 0{,}125\,\mathrm{m}$, $24\,\mathrm{cn} = 0{,}24\,\mathrm{m}$, $4\,\mathrm{cm} = 0{,}04\,\mathrm{m}$.

a) Objem vody, která vyteče při spláchnutí (respektive musí zase přitéci), vypočteme podle vztahu pro objem kvádr $V = 0{,}4 \cdot 0{,}125 \cdot (0{,}24 - 0{,}04)\ \mathrm{m^3} = 0{,}01\,\mathrm{m^3} = 10\,\mathrm{dm^3}$. **1 bod**

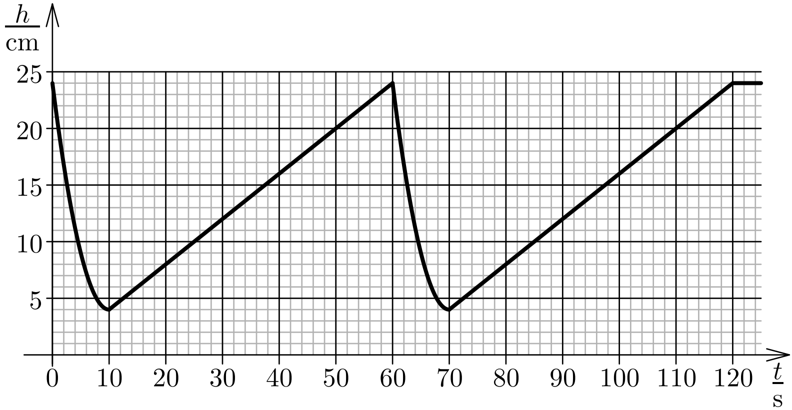
b) Maximální objem vody v nádobě je

$$V_\mathrm{max} = 0{,}4 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}24\,\mathrm{m^3} = 0{,}012\,\mathrm{m^3} = 12\,\mathrm{dm^3},$$

minimální objem vody v nádobě je

$$V_\mathrm{min} = 0{,}4 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}04\,\mathrm{m^3} = 0{,}002\,\mathrm{m^3} = 2\,\mathrm{dm^3}.$$

Čas napouštění je 50 s, rychlost napouštění můžeme považovat za konstantní. Čas vypouštění je 10 s, rychlost vypouštění je závislá na množství vody v nádobce. Na začátku je největší, ke konci je stále menší a menší. Závislost výšky hladiny vody v nádobce na čase je znázorněna na obr. 1. **3 body**



Obr. 1: K řešení úlohy FO54E3 – průběh změn hladiny vody při dvou po sobě následujících spláchnutích

c) Rychlost přitékání vody do nádoby je dána poměrem objemu nateklé vody za určitou dobu a této doby. Za 50 s přiteče objem $V_{\text{max}} - V_{\text{min}} = 12\,\text{dm}^3 - 2\,\text{dm}^3 = 10\,\text{dm}^3 = 10\,\text{l}$. Rychlost přitékání vody (přítok) je tedy

$$Q = \frac{10\,\text{l}}{50\,\text{s}} = 0{,}2\,\text{l/s} = 60 \cdot 0{,}2\,\text{l/min} = 12\,\text{l/min} = $$
$$= 60 \cdot 12\,\text{l/h} = 720\,\text{l/h} = 0{,}720\,\text{m}^3/\text{h}.$$

Vnitřní průměr trubice je 1,27 cm = 0,012 7 cm, obsah příčného průřezu přívodní trubice potom

$$S = \pi\frac{d^2}{4} \doteq 0{,}000\,13\,\text{m}^2.$$

Přítok vody $Q = Sv = 0{,}2\,\text{l/s} = 0{,}000\,2\,\text{m}^3/\text{s}$ Pro lineární rychlost vody dostáváme $v = Q/S \doteq 1{,}5\,\text{m/s}$. **3 body**

d) Za 1 s přiteče $0{,}000\,2\,\text{m}^3$ vody. Od sobotního rána v 8:00 h do nedělního podvečera v 18:00 h uplynula doba celkem 34 h neboli $34 \cdot 3\,600\,\text{s} = 122\,400\,\text{s}$. Za celou tuto dobu protekl záchodem objem $V = 0{,}000\,2 \cdot 122\,400\,\text{m}^3 \doteq 24{,}5\,\text{m}^3$. Finanční ztrátu tak můžeme odhadnout na $24{,}5\,\text{m}^3 \cdot 72\,\text{Kč/m}^3 \doteq 1\,760\,\text{Kč}$. **3 body**

4. FO54E4: Odpor vodiče

a) Po označení veličin, délky $l = 5\,\text{m}$, obsahu příčného průřezu $S = 1\,\text{mm}^2 = 1 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2$ a měrného elektrického odporu $\varrho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega \cdot \text{m}$, dosadíme do vztahu pro odpor drátu

$$R = \varrho\frac{l}{S} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\frac{5}{1 \cdot 10^{-6}}\,\Omega = 0{,}085\,\Omega.$$

1 bod

b) Při rozdělení drátu na dvě stejné poloviny, bude odpor jedné části drátu $R/2$. Jestliže dvě části k sobě spojíme paralelně, pro výsledný odpor R_c platí

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}} = \frac{1}{\frac{R}{2}} + \frac{1}{\frac{R}{2}} = \frac{4}{R}, \qquad \Longrightarrow \qquad R_\mathrm{c} = \frac{R}{4} = 0{,}021\,\Omega.$$

K výsledku lze dojít také aplikací vzorce ze zadání. Na dráty vedle sebe se můžeme dívat jako na vodič poloviční délkou $l' = l/2$ a dvojnásobným příčným průřezem $S' = 2S$. Výsledný odpor

$$R' = l' \frac{\varrho}{S'} = \frac{l}{2} \frac{\varrho}{2S} = \frac{1}{4} \varrho \frac{l}{S} = \frac{R}{4}$$

je čtyřikrát menší, než původní. **3 body**

c) Jsou-li hmotnosti drátů stejné a oba jsou z mědi, poté musí být stejné i jejich objemy. Je-li první drát dvakrát delší než druhý, potom jeho obsah příčného průřezu musí být poloviční. Bude-li odpor kratšího drátu R a délka delšího drátu je dvojnásobná než kratšího a jeho obsah příčného průřezu je poloviční než kratšího, poté se jedná o opačný případ než úloze b). Odpor delšího vodiče je tedy $4R$. **6 bodů**