ÚSTŘEDNÍ KOMISE FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY ČESKÉ REPUBLIKY
E-mail: `ivo.volf@uhk.cz`, tel.: 493 331 190, 493 331 189

Řešení úloh krajského kola 55. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie E

Předložená řešení by neměla být považována za jedině možná nebo nejsprávnější, většinou lze k výsledkům dojít i jinou cestou. Za jednu úlohu je možné získat maximálně 10 bodů. Plný počet bodů dostává řešitel, jestliže je úloha či její část řešena zcela bez chyb nebo se v řešení vyskytují pouze drobné formální nedostatky. Příznivé hodnocení předpokládá, že protokol o řešení obsahuje fyzikální vysvětlení, z něhož jasně vyplývá myšlenkový postup při řešení daného problému.

Za řešení úloh v krajském kole může řešitel získat celkem 40 bodů, přičemž úspěšným řešitelem se stává ten soutěžící, který bude hodnocen alespoň ve dvou úlohách nejméně 5 body a v celkovém hodnocení dosáhne alespoň 14 bodů.

Texty a řešení najdou zájemci i v některém z příštích čísel časopisu Školská fyzika.

1. FO55E3–1: Závody na táboře

a) Pro přehlednost jsou zadané údaje shrnuty v tabulce:

Jméno	Disciplína	Dráha	Rychlost	Doba
Pavel	Plavání	$s_1 = 600\,\mathrm{m}$	v_1	$t_1 = 20\,\mathrm{min}$
	Jízda na kole	$s_2 = 15\,\mathrm{km}$	$v_2 = 25\,\mathrm{km/h}$	t_2
	Běh	s_3	$v_3 = 6{,}0\,\mathrm{m/s}$	$t_3 = 12\,\mathrm{min}\,15\,\mathrm{s}$
Agáta	Plavání	$s_4 = 600\,\mathrm{m}$	v_4	$t_4 = 18\,\mathrm{min}$
	Jízda na kole	$s_5 = 15\,\mathrm{km}$	$v_5 = 18\,\mathrm{km/h}$	t_5
	Běh	s_3	$v_6 = 5{,}0\,\mathrm{m/s}$	t_6

Celkovou délku závodu je možné vypočítat z Pavlových údajů

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = s_1 + s_2 + v_3 t_3 = \\ = 600\,\mathrm{m} + 15\,000\,\mathrm{m} + 6\,\mathrm{m/s} \cdot 735\,\mathrm{s} = 20\,010\,\mathrm{m} \doteq 20\,\mathrm{km}.$$

2 body

b) Doba, za kterou Pavel absolvoval závod, byla

$$t_\mathrm{p} = t_1 + t_2 + t_3 = t_1 + \frac{s_2}{v_2} + t_3 = \left(1200 + \frac{15}{25} \cdot 3\,600 + 735\right)\,\mathrm{s} = 4\,095\,\mathrm{s} \doteq 1{,}1\,\mathrm{h}.$$

Podobně pro Agátu

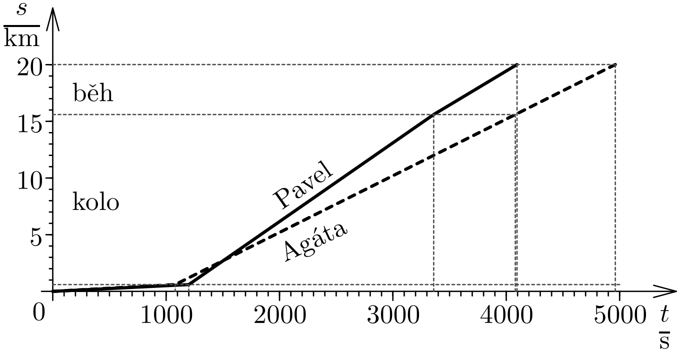
$$t_\mathrm{a} = t_4 + t_5 + t_6 = t_4 + \frac{s_2}{v_5} + \frac{v_3 t_3}{v_6} = \left(1080 + \frac{15}{18} \cdot 3\,600 + \frac{6 \cdot 735}{5}\right)\,\mathrm{s} = 4\,962\,\mathrm{s} \doteq 1{,}4\,\mathrm{h}.$$

Pro průměrné rychlosti vychází

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t_\mathrm{p}} = \frac{20\,010}{4095}\,\mathrm{m/s} \doteq 4{,}9\,\mathrm{m/s}, \qquad v_\mathrm{a} = \frac{s}{t_\mathrm{a}} = \frac{20\,010}{4962}\,\mathrm{m/s} \doteq 4{,}0\,\mathrm{m/s}.$$

2 body

c) Grafické znázornění závislosti $s = s(t)$ je pro Pavla i Agátu zakresleno na obrázku.



3 body

d) Zadané údaje opět přehledně shrneme do tabulky:

Jméno	Disciplína	Dráha	Rychlost	Doba
Mirek	Běh	$s_{\mathrm{m1}} = 4\,410\,\mathrm{m}$	$v_{\mathrm{m1}} = 7{,}2\,\mathrm{m/s}$	t_{m1}
	Jízda na kole	$s_{\mathrm{m2}} = 15\,\mathrm{km}$	$v_{\mathrm{m2}} = 24\,\mathrm{km/s}$	t_{m2}
	Plavání	$s_{\mathrm{m3}} = 600\,\mathrm{m}$	v_{m3}	$t_{\mathrm{3m}} = 24\,\mathrm{min}$

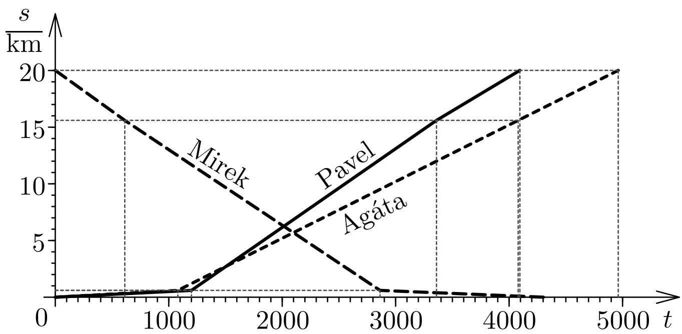
Dopočítáme zbývající údaje

$$t_{\mathrm{m1}} = \frac{s_{\mathrm{m1}}}{t_{\mathrm{m1}}} = \frac{4\,410\,\mathrm{m}}{7{,}2\,\mathrm{m/s}} = 612{,}5\,\mathrm{s}, \qquad t_{\mathrm{m2}} = \frac{s_{\mathrm{m2}}}{t_{\mathrm{m2}}} = \frac{15\,\mathrm{km}}{24\,\mathrm{km/h}} = 0{,}625\,\mathrm{h} = 2\,250\,\mathrm{s}.$$

Závod Mirek zvládl v čase

$$t_{\mathrm{m}} = t_{\mathrm{m1}} + t_{\mathrm{m2}} + t_{\mathrm{m3}} = 612{,}5\,\mathrm{s} + 2\,250\,\mathrm{s} + 24 \cdot 60\,\mathrm{s} \doteq 4\,300\,\mathrm{s} \doteq 1{,}2\,\mathrm{h}.$$

Grafy jsou na obrázku. **3 body**



2. FO55E3–2: Spotřeba benzínu

a) Při rychlosti $v_1 = 90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m/s}$ je odporová síla

$$F_\mathrm{a} = k_1 v_1^2 = 0{,}52 \cdot 25^2\,\mathrm{N} = 325\,\mathrm{N} \doteq 330\,\mathrm{N}$$

Při ujetí vzdálenosti $s_1 = 87\,\mathrm{km} = 87\,000\,\mathrm{m}$ vykoná motor práci $W_{1\mathrm{a}} = F_\mathrm{a} s_1 = 325\,\mathrm{N} \cdot 87\,000\,\mathrm{m} \doteq 28\,\mathrm{MJ}$. Podobně při ujetí vzdálenosti $s_2 = 100\,\mathrm{km} = 100\,000\,\mathrm{m}$ vykoná motor práci $W_{2\mathrm{a}} = F_\mathrm{a} s_2 = 325\,\mathrm{N} \cdot 100\,000\,\mathrm{m} \doteq 33\,\mathrm{MJ}$. Dokonalým spálením litru benzínu získáme $Q_1 = 33\,\mathrm{MJ/l}$ tepla, při účinnosti motoru $\eta_1 = 22\,\%$ však pouze $Q_1' = \eta_1 Q_1 = 7{,}26\,\mathrm{MJ}$. Spotřeba benzínu v litrech na ujetí vzdálenosti 87 km pak vychází

$$V_{87\mathrm{a}} = \frac{W_{1\mathrm{a}}}{Q_1'} = \frac{W_{1\mathrm{a}}}{\eta_1 Q_1} = \frac{28}{0{,}22 \cdot 33}\,\mathrm{l} \doteq 3{,}9\,\mathrm{l}.$$

Podobně pro vzdálenost 100 km získáváme

$$V_{100\mathrm{a}} = \frac{W_{2\mathrm{a}}}{\eta_1 Q_1} = \frac{33}{0{,}22 \cdot 33}\,\mathrm{l} \doteq 4{,}5\,\mathrm{l}.$$

3 body

b) Zkušený řidič pojede za stejných podmínek po dálnici $v_2 = 126\,\mathrm{km/h} = 35\,\mathrm{m/s}$. Odporová síla vychází

$$F_\mathrm{b} = k_1 v_2^2 = 0{,}52 \cdot 35^2\,\mathrm{N} = 637\,\mathrm{N} \doteq 640\,\mathrm{N}$$

Při ujetí vzdálenosti $s_1 = 87\,\mathrm{km} = 87\,000\,\mathrm{m}$ vykoná motor práci $W_{1\mathrm{b}} = F_\mathrm{b} s_1 = 637\,\mathrm{N} \cdot 87\,000\,\mathrm{m} \doteq 55\,\mathrm{MJ}$. Podobně při ujetí vzdálenosti $s_2 = 100\,\mathrm{km} = 100\,000\,\mathrm{m}$ vykoná motor práci $W_{2\mathrm{b}} = F_\mathrm{b} s_2 = 637\,\mathrm{N} \cdot 100\,000\,\mathrm{m} \doteq 64\,\mathrm{MJ}$. Při účinnosti motoru $\eta_1 = 22\,\%$ pak podobně jako v části a) postupně dostaneme

$$V_{87\mathrm{b}} = \frac{W_{1\mathrm{b}}}{\eta_1 Q_1} = \frac{55}{0{,}22 \cdot 33}\,\mathrm{l} \doteq 7{,}6\,\mathrm{l}, \qquad V_{100\mathrm{b}} = \frac{W_{2\mathrm{b}}}{\eta_1 Q_1} = \frac{64}{0{,}22 \cdot 33}\,\mathrm{l} \doteq 8{,}8\,\mathrm{l}.$$

3 body

c) Využijeme stejné vzorce vztahy jako v částech a) a b). Postupně vychází

$$F_{3\mathrm{a}} = k_2 v_1^2 = 0{,}45 \cdot 25^2\,\mathrm{N} \doteq 281\,\mathrm{N}, \qquad F_{3\mathrm{b}} = k_2 v_2^2 = 0{,}45 \cdot 35^2\,\mathrm{N} \doteq 551\,\mathrm{N},$$
$$W_3 = F_{3\mathrm{a}} s_2 = 281\,\mathrm{N} \cdot 100\,000\,\mathrm{m} \doteq 28\,\mathrm{MJ},$$
$$W_3' = F_{3\mathrm{b}} s_2 = 551\,\mathrm{N} \cdot 100\,000\,\mathrm{m} \doteq 55\,\mathrm{MJ},$$
$$V_{100\mathrm{c}} = \frac{W_3}{\eta_2 Q_1} = \frac{28}{0{,}25 \cdot 33}\,\mathrm{l} \doteq 3{,}4\,\mathrm{l}, \qquad V_{100\mathrm{c}}' = \frac{W_3'}{\eta_2 Q_1} = \frac{55}{0{,}25 \cdot 33}\,\mathrm{l} \doteq 6{,}7\,\mathrm{l}.$$

Při rychlosti 90 km/h je rozdíl spotřeby $4{,}5\,\mathrm{l} - 3{,}4\,\mathrm{l} = 1{,}1\,\mathrm{l}$, ujetí trasy 100 km přijde na 124 Kč, při rychlosti 126 km/h činí rozdíl přibližně $8{,}8\,\mathrm{l} - 6{,}7\,\mathrm{l} = 2{,}1\,\mathrm{l}$ a trasa 100 km přijde na 245 Kč. **4 body**

3. FO55E3-3: Archeologický výzkum na dně jezera

a) Hmotnost sloupu je $m = \varrho_\mathrm{p} V = \varrho_\mathrm{p} hS = 2\,500\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 8\,\mathrm{m} \cdot 0{,}75\,\mathrm{m^2} = 15\,000\,\mathrm{kg}$. Jestliže není sloup zcela „přimáčknutý" ke dnu, poté na něho okolní voda působí hydrostatickou vztlakovou silou o velikosti

$$F_\mathrm{vz} = \varrho_\mathrm{v} Vg = \varrho_\mathrm{v} hSg = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 8\,\mathrm{m} \cdot 0{,}75\,\mathrm{m^2} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 60\,\mathrm{kN}.$$

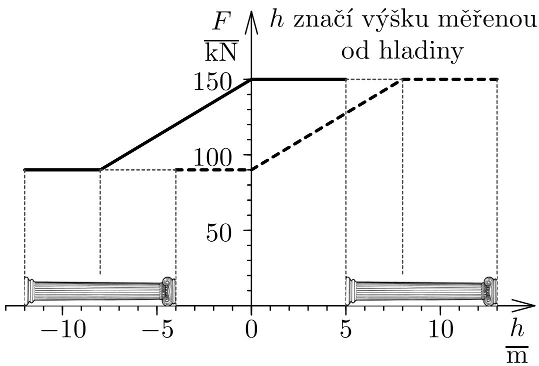
2 body

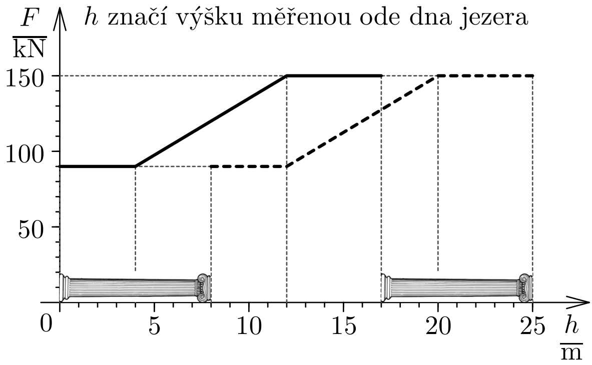
b) Pískovcový sloup budeme považovat za stejnorodé těleso. Na sloup působí v těžišti Země tíhovou silou $F_\mathrm{G} = mg = 15\,000\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 150\,\mathrm{kN}$. Působiště vztlakové síly $F_\mathrm{vz} = 60\,\mathrm{kN}$ je možné uvažovat také v těžišti. Jestliže je sloup ve vodorovné poloze, jeřáb na něho působí těsně u jedné podstavy směrem svisle vzhůru a lehce ho nadzvedl, poté dno jezera působí již jen na druhý konec sloupu, avšak stejně velikou silou, jako jeřáb. K nadzvednutí sloupu je potřeba síla nepatrně větší než $F = \frac{1}{2}\left(F_\mathrm{G} - F_\mathrm{vz}\right) = \frac{1}{2}\left(150\,\mathrm{kN} - 60\,\mathrm{kN}\right) = 45\,\mathrm{kN}$, kterou musí jeřáb působit na sloup při začátku zvedání. Čím je sloup více ve „stojaté" poloze, tím větší silou působí dno a menší silou musí působit jeřáb. Tento detail řešit nebudeme. **2 body**

c) Když byl ještě sloup zcela ponořen, musel jeřáb působit silou $F_2 = F_\mathrm{G} - F_\mathrm{vz} = 150\,\mathrm{kN} - 60\,\mathrm{kN} = 90\,\mathrm{kN}$. **1 bod**

d) Jakmile sloup již nebyl zcela ponořen do vody, poté se síla, kterou musí působit jeřáb na sloup, zvětšuje, neboť vztlaková síla se zmenšuje. Po úplném vytažení z vody musí jeřáb působit silou $F_3 = F_\mathrm{G} = 150\,\mathrm{kN}$. **1 bod**

e) Grafy pro různé možnosti (výška dolní postavy sloupu nade dnem, horní podstavy nade dnem, dolní podstavy sloupu nad hladinou a horní postavy na hladinou jsou na obrázcích).





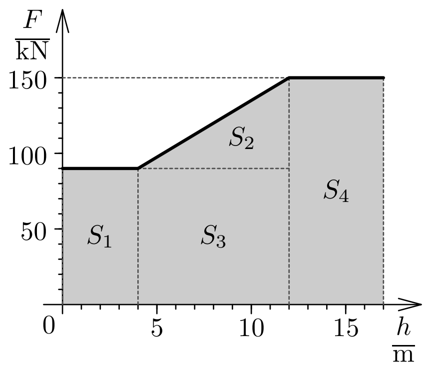
2 body

f) Práci je možné zjistit výpočtem obsahu „útvaru pod grafem“. Pro jednoduchost vybereme graf, který začíná v počátku soustavy souřadné, např. pro výšku h dolní podstavy sloupu měřenou ode dna jezera.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$W = 4\,\text{m} \cdot 90\,000\,\text{N} + \frac{1}{2} \cdot 8\,\text{m} \cdot 60\,000\,\text{N} + 8\,\text{m} \cdot 90\,000\,\text{N} + 5\,\text{m} \cdot 150\,000\,\text{N} =$$

$$= 2\,070\,000\,\text{J} \doteq 2\,\text{MJ}$$



2 body

4. FO55E3-4: Starší pražské tramvaje

a) Celkový výkon elektromotorů dohromady byl 160 kW. Při napětí je 600 V musí být proud, který prochází přívodním vodičem,

$$I = \frac{P}{U} = \frac{160000}{600}\,\text{A} \doteq 270\,\text{A}.$$

2 body

b) Rychlost tramvaje $v = 63\,\mathrm{km/h} = 17{,}5\,\mathrm{m/s}$. Celková spotřebovaná elektrická práce je $W = Pt$, kde $t = s/v = 15\,000/17{,}5\,\mathrm{s} \doteq 860\,\mathrm{s} = 14{,}3\,\mathrm{min}$. Potom $W = 160\,\mathrm{kW} \cdot 860\,\mathrm{s} \doteq 137\,\mathrm{MJ}$.
Dále také $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{W{\cdot}s}$ a $1\,\mathrm{kWh} = 3\,600\,000\,\mathrm{W{\cdot}s} = 3\,600\,000\,\mathrm{J} = 3{,}6\,\mathrm{MJ}$. Potom $W = 137\,\mathrm{MJ} = 137/3{,}6\,\mathrm{kWh} = 38\,\mathrm{kWh}$, což odpovídá ceně asi $38 \cdot 3{,}7\,\text{Kč} \doteq 140\,\text{Kč}$. Tramvaj však jede delší dobu, musí se rozjíždět a zastavovat, takže uvedená částka by byla podstatně větší. **3 body**

c) Pro aktivní výkon tramvaje platí

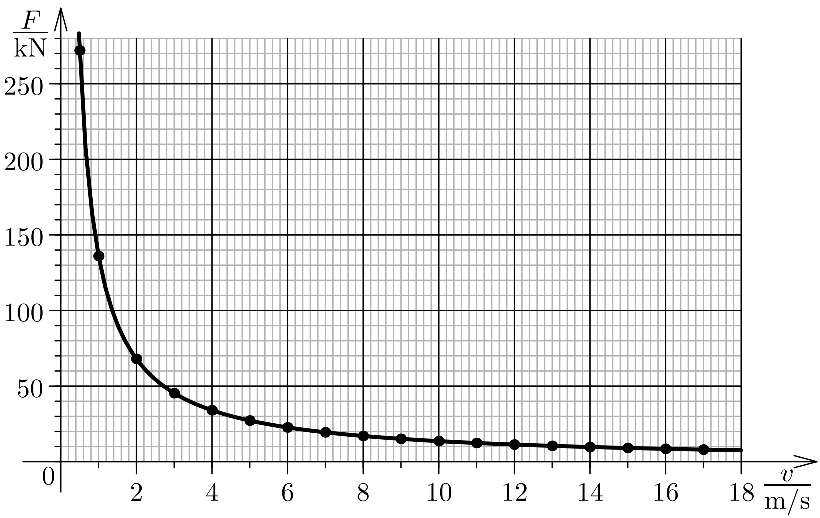
$$P_\mathrm{t} = 0{,}85P = F \cdot v; \qquad F = \frac{0{,}85 \cdot P}{v} = \frac{0{,}85 \cdot 160}{17{,}5}\,\mathrm{kN} \doteq 7{,}8\,\mathrm{kN}.$$

2 body

d) Nejprve je potřeba zvolit si některé hodnoty rychlosti tramvaje a dopočítat k nim tahovou sílu; například lze vyjít z hodnot v následující tabulce:

$\frac{v}{\mathrm{m/s}}$	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10	11	12	13	14	15	16	17
$\frac{F}{\mathrm{kN}}$	272	136	68,0	45,3	34	27,2	22,7	19,4	17,0	15,1	13,6	12,4	11,3	10,5	9,71	9,07	8,50	8,00

Graf závislosti $F(v) = \dfrac{136}{v}\,\mathrm{kN}$ je na obrázku.



3 body