Řešení úloh regionálního kola 44. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie E

1. Označíme celou trasu $s = 12{,}0\,\mathrm{km}$, první část s_1, druhou část s_2; platí $s_1 = s_2 = s/2 = 6{,}0\,\mathrm{km}$. Karel se pohybuje tam rychlostí $v_1 = 4{,}0\,\mathrm{m/s}$, zpět $v_2 = 6{,}0\,\mathrm{m/s}$. Pavel vyrazil o $\Delta t_1 = 2{,}0\,\mathrm{min}$ později a dorazil o $\Delta t_2 = 5{,}0\,\mathrm{min}$ dříve, celkem byl na trase o $7{,}0\,\mathrm{min}$ méně.

a) Karel:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{6000\,\mathrm{m}}{4{,}0\,\mathrm{m/s}} = 1\,500\,\mathrm{s} = 25\,\mathrm{min}, \qquad t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{6000\,\mathrm{m}}{6{,}0\,\mathrm{m/s}} = 1\,000\,\mathrm{s} \approx 16{,}7\,\mathrm{min}.$$

Celkem stráví Karel na trase čas $t_\mathrm{K} = t_1 + t_2 = 2\,500\,\mathrm{s} = 41{,}7\,\mathrm{min} = 41\,\mathrm{min}\ 40\,\mathrm{s}$.
Pavel:

$$t_1' = t_1 - \Delta t_1 = 23\,\mathrm{min} = 1\,380\,\mathrm{s}, \qquad t_2' = t_2 - \Delta t_2 = 11{,}7\,\mathrm{min} = 700\,\mathrm{s}$$

Celkem stráví Pavel na trase čas $t_\mathrm{P} = t_1' + t_2' = 2\,080\,\mathrm{s} = 34{,}7\,\mathrm{min} = 34\,\mathrm{min}\ 40\,\mathrm{s}$.

3 body

b) Průměrné rychlosti Pavla vycházejí

$$v_1' = \frac{s_1}{t_1'} = \frac{6\,000\,\mathrm{m}}{1\,380\,\mathrm{s}} = 4{,}347\,\mathrm{m/s} \approx 4{,}3\,\mathrm{m/s}, \qquad v_2' = \frac{s_2}{t_2'} = \frac{6\,000\,\mathrm{m}}{700\,\mathrm{s}} = 8{,}571\,\mathrm{m/s} \approx 8{,}6\,\mathrm{m/s}.$$

2 body

c) Pro Karla dostáváme

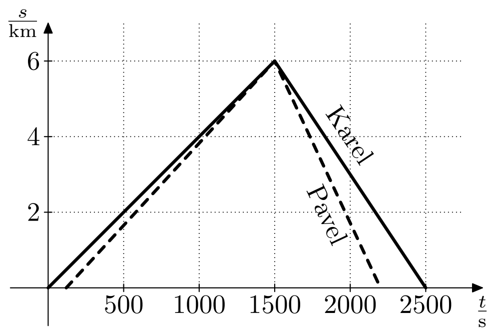
$$v_\mathrm{K} = \frac{s}{t_\mathrm{K}} = \frac{s}{\dfrac{s/2}{v_1} + \dfrac{s/2}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 4{,}8\,\mathrm{m/s},$$

pro Pavla

$$v_\mathrm{P} = \frac{s}{t_\mathrm{P}} = \frac{6\,000\,\mathrm{m}}{2\,080\,\mathrm{s}} = 5{,}77\,\mathrm{m/s} \approx 5{,}8\,\mathrm{m/s}.$$

2 body

d) Graf $s = s(t)$ je na obr. 1.



Obr. 1: K úloze 1d)

3 body

2. Objem $V_0 = 250\,\mathrm{l}$, průměr sudu $d = 7{,}0\,\mathrm{dm}$, výška $h = 7{,}0\,\mathrm{dm}$.

a) Objem sudu

$$V_\mathrm{s} = \pi\frac{d^2}{4}h = \pi \cdot \frac{7^2}{4} \cdot 7 = 269{,}39\,\mathrm{l} \approx 270\,\mathrm{l}.$$

Výška vody h_v

$$h_\mathrm{v} = \frac{V_0}{S} = \frac{V}{\pi d^2/4} = 6{,}49\,\mathrm{dm} \approx 6{,}5\,\mathrm{dm}.$$

2 body

b) Tlaková síla $F_\mathrm{t} = V_0\varrho g = 2\,452{,}5\,\mathrm{N} \approx 2\,500\,\mathrm{N}$.
Tlak $p = h_\mathrm{v}\varrho g = 6\,373\,\mathrm{Pa} \approx 6\,400\,\mathrm{Pa}$ (nebo také $6\,500\,\mathrm{Pa}$, počítáme-li se zaokrouhlenou hodnotou a s $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$).

3 body

c) Přítok vody je dán $10\,\mathrm{l}$ za $2\,\mathrm{min}$, tj. $5{,}0\,\mathrm{l/min}$. Voda o objemu $V_0 = 250\,\mathrm{l}$ přiteče za $50\,\mathrm{min}$.

2 body

d) Měřicí tyč: po přilití objemu $V_1 = 10$ l se výška hladiny změní o

$$\Delta h = \frac{V_1}{S} = \frac{V_1}{\pi d^2/4} \approx 0{,}26\,\mathrm{dm} = 2{,}6\,\mathrm{cm}.$$

Tak daleko od sebe je nutno udělat čárky na tyčce.

3 body

3. Označíme $V_\mathrm{v} = 1{,}2\,\mathrm{l}$, $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$, $m_1 = \varrho_\mathrm{v} V_\mathrm{v} = 1{,}2\,\mathrm{kg}$, $t_1 = 15\,°\mathrm{C}$, $t_2 = 100\,°\mathrm{C}$, $\Delta t = 85\,°\mathrm{C}$, $c_1 = 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)}$, $c_2 = 460\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)}$, $m_2 = 0{,}80\,\mathrm{kg}$. Dále $P_1 = 2\,000\,\mathrm{W}$, $P_2 = 1\,200\,\mathrm{W}$, $P_3 = 600\,\mathrm{W}$.

a) Teplo potřebné k ohřátí vody na teplotu varu t_2 vychází $Q_1 = m_1 c_1 \Delta t = 428\,400\,\mathrm{J} = 428\,\mathrm{kJ}$.

2 body

b) Pro rychlovarnou konvici $P_1 \tau_1 = m_1 c_1 \Delta t$, a tedy pro čas τ_1 potřebný k zahřátí dostáváme

$$\tau_1 = \frac{Q_1}{P_1} = \frac{m_1 c_1 \Delta t}{P_1} \approx 214\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{min}\ 34\,\mathrm{s}.$$

2 body

c) Pro zahřátí vody v hrnci musíme započítat i teplo potřebné k zahřátí hrnce. Celkem tedy potřebujeme teplo $Q_1 = m_1 c_1 \Delta t + m_2 c_2 \Delta t = (m_1 c_1 + m_2 c_2)\,\Delta t = 459\,680\,\mathrm{J} = 460\,\mathrm{kJ}$. Doba τ_2 potřebná k zahřátí by pak měla být

$$\tau_2 = \frac{Q_2}{P_2} \approx 383\,\mathrm{s} = 6\,\mathrm{min}\ 23\,\mathrm{s}.$$

Jak víme ze zadání, ve skutečnosti zahřátí trvalo dobu $\tau_2' = \tau_1 + 5\,\mathrm{min} = 514\,\mathrm{s} = 8\,\mathrm{min}\ 34\,\mathrm{s} > \tau_2$. Důvodem jsou tepelné ztráty do okolí, z tepla dodaného vařičem se využije pouze část k zahřátí vody a hrnce, účinnost využití tepla je $\eta_2 = \tau_2/\tau_2' \approx 74{,}5\%$, zbývajících 24,5% představují zmíněné ztráty. Uvážíme-li, že část tepla jde i na ohřev hrnce, pak celková účinnost ohřevu vody je pouze

$$\eta_2' = \frac{Q_1}{P_2 \tau_2'} = \frac{P_1 \tau_1}{P_2 \tau_2'} \approx 69{,}3\%.$$

3 body

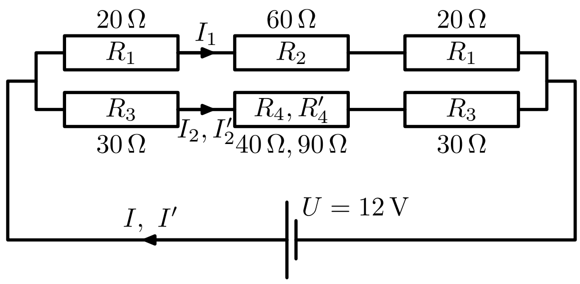
d) Na prastarém vařiči je příkon $P_3 = 600\,\mathrm{W}$, využijeme jen 40%, tj. $P_3' = 0{,}4 \cdot P_3 = 240\,\mathrm{W}$. Označíme-li τ_3 čas potřebný pro ohřátí vody i hrnce, bude

$$\tau_3 = \frac{Q_2}{P_3'} = \frac{460\,000\,\mathrm{kJ}}{240\,\mathrm{W}} \approx 1\,917\,\mathrm{s} = 31\,\mathrm{min}\ 57\,\mathrm{s} \approx 32\,\mathrm{min}.$$

Za správný bude uznán i výsledek, když Q_2 zaměníte za Q_1, v tom případě vychází $\tau_3' \approx 1783\,\mathrm{s} \approx 29{,}7\,\mathrm{min}$.

3 body

4. a) Jednoduchý nákres obvodu je na obr. 2.



Obr. 2: K úloze 4a)

3 body

b) Odpory ve větvích $R_5 = 2R_1 + R_2 = 100\,\Omega$, $R_6 = 2R_3 + R_4 = 100\,\Omega$, celkový odpor $R = R_5 \cdot R_6/(R_5 + R_6) = 50\,\Omega$. Celkový proud $I = U/R = 12\,\mathrm{V}/50\,\Omega = 0{,}24\,\mathrm{A} = 240\,\mathrm{mA}$.

2 body

c) Odpory obou větví jsou stejné, takže každou větví prochází proud $I_1 = I_2 = 120\,\mathrm{mA}$. Pro napětí na rezistorech dostáváme v první větvi $U_1 = I_1 R_1 = 2{,}4\,\mathrm{V}$, $U_2 = I_1 R_2 = 7{,}2\,\mathrm{V}$, $U_1 = I_1 R_1 = 2{,}4\,\mathrm{V}$ (celkem 12 V), ve druhé větvi $U_3 = I_2 R_3 = 3{,}6\,\mathrm{V}$, $U_4 = I_2 R_4 = 4{,}8\,\mathrm{V}$, $U_3 = I_2 R_3 = 3{,}6\,\mathrm{V}$ (celkem opět 12 V).

2 body

d) Druhá větev má teď odpor $R_6' = 2R_3 + R_4' = 150\,\Omega$, celkový odpor $R' = R_5 \cdot R_6'/(R_5 + R_6') = 60\,\Omega$, celkový proud $I' = U/R' = 12\,\mathrm{V}/60\,\Omega = 0{,}2\,\mathrm{A} = 200\,\mathrm{mA}$. Protože odpor v první větvi se nezměnil a celkové napětí na rezistorech v této větvi musí zůstat 12 V, prochází v první větvi opět proud $I_1 = 120\,\mathrm{mA}$. Druhou větví pak musí protékat proud $I_2' = I' - I_1 = 200\,\mathrm{mA} - 120\,\mathrm{mA} = 80\,\mathrm{mA}$. Napětí na rezistorech v první větvi se nezmění, ve druhé větvi pak vychází $U_3' = I_2' R_3 = 2{,}4\,\mathrm{V}$, $U_4' = I_2' R_4 = 7{,}2\,\mathrm{V}$, $U_3' = I_2' R_3 = 2{,}4\,\mathrm{V}$, tedy napětí se rozdělí stejně jako v první větvi (poměry odporů jsou nyní v obou větvích stejné).

3 body