Řešení úloh regionálního kola 45. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie E

1. Označme $l = 150\,\mathrm{m}$, $t_1 = 12\,\mathrm{s}$, $t_2 = 48\,\mathrm{s}$, $t_3 = 80\,\mathrm{s}$.

a) $v = l/t_1 = 12{,}5\,\mathrm{m/s}$. **2 body**

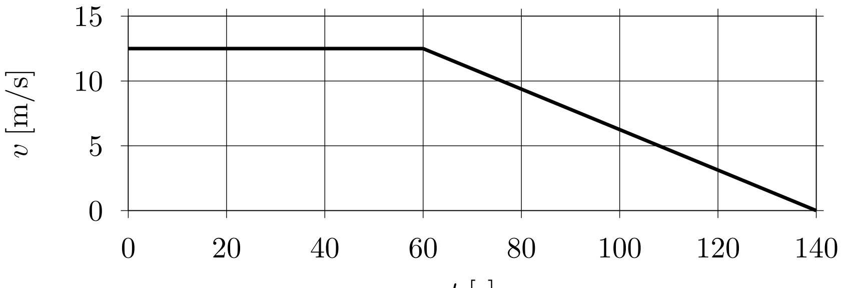
b) $t_4 = t_1 = 12\,\mathrm{s}$. **1 bod**

c) $d = v \cdot t_2 = l \cdot t_2/t_1 = 600\,\mathrm{m}$. **1 bod**

d) $t_5 = (d + l)/v = (v \cdot t_2 + v \cdot t_1)/v = t_1 + t_2 = 60\,\mathrm{s}$. **2 body**

e) $s = l + v \cdot t_3/2 = l\,[1 + t_3/(2t_1)] = 650\,\mathrm{m}$. **2 body**

f) Graf je na obr. 1. **2 body**



Obr. 1: Závislost $v = v(t)$ k úloze **1**.

2. Označme jmenovité údaje na štítku vařiče $U_\mathrm{j} = 220\,\mathrm{V}$, $P_\mathrm{j} = 1000\,\mathrm{W}$, objem vody $V = 2{,}5\,\mathrm{l}$, počáteční teplotu $t_1 = 15\,°\mathrm{C}$. V tabulkách najdeme hustotu vody $\varrho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, bod varu vody $t_2 = 100\,°\mathrm{C}$. Rozdíl teplot $\Delta t = t_2 - t_1 = 85\,°\mathrm{C}$, hmotnost ohřívané vody $m = \varrho \cdot V = 2{,}5\,\mathrm{kg}$. Protože je v elektrické síti nyní napětí $U_\mathrm{s} = 230\,\mathrm{V}$, bude výkon vařiče vyšší než údaj na štítku, který odpovídá napětí $U_\mathrm{j} = 220\,\mathrm{V}$. Výpočtem zjistíme skutečný výkon $P_n = (U_\mathrm{s}/U_\mathrm{j})^2 \cdot P_\mathrm{j} = (230/220)^2 \cdot 1000\,\mathrm{W} = 1092{,}98\,\mathrm{W}$. Čas, za který začne voda vařit označíme τ, měrná tepelná kapacita vody $c = 4200\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)}$, čas, za který voda začala skutečně vařit $\tau_\mathrm{s} = 36\,\mathrm{min}$.

a) $m \cdot c \cdot \Delta t = P_n \cdot \tau$, $\tau = m \cdot c \cdot \Delta t/P_n = 817\,\mathrm{s} = 13{,}6\,\mathrm{min} = 13\,\mathrm{min}\,37\,\mathrm{s}$. **2 body**

b) Nyní $m \cdot c \cdot \Delta t = P_n \cdot \tau_\mathrm{s} \cdot \eta$, odkud $\eta = \tau/\tau_\mathrm{s} = 0{,}38\,\%$. **2 body**

c) Označme původní odpor R a odpor po zkrácení R_1. Protože odpor vodiče závisí přímo úměrně na jeho délce, $R_1 = 19/20\,R$. Výkon naopak je naopak nepřímo úměrný odporu, neboť $P = U^2/R$, proto $P_{n1} = R/R_1 \cdot P_n = 1150{,}5\,\mathrm{W}$. **2 body**

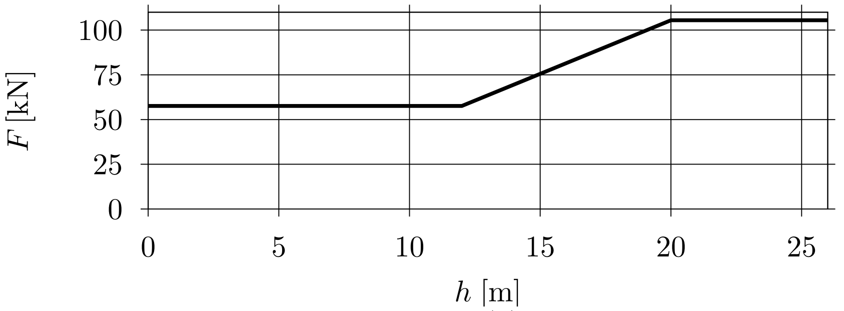
d) $\tau_1 = m \cdot c \cdot \Delta t/P_{n1} = 19/20 \cdot \tau = 776\,\mathrm{s} = 12{,}9\,\mathrm{min} = 12\,\mathrm{min}\,56\,\mathrm{s}$, $\tau_{s1} = m \cdot c \cdot \Delta t/(P_{n1}\eta) = 19/20 \cdot \tau_\mathrm{s} = 34{,}2\,\mathrm{min} = 34\,\mathrm{min}\,12\,\mathrm{s}$. **3 body**

e) Odpor vodiče zjistíme z jmenovitého napětí a jmenovitého výkonu $R = U_\mathrm{j}^2/P_\mathrm{j} = 48{,}4\,\Omega$. Před zkrácením topného drátu jím procházel proud $I = U_\mathrm{s}/R = 230/(220^2/1000)\,\mathrm{A} = 4{,}75\,\mathrm{A}$, po zkrácení $I_1 = U_\mathrm{s}/R_1 = U_\mathrm{s}/(19 \cdot R/20) = 20/19 \cdot I_1 = 5{,}0\,\mathrm{A}$. **1 bod**

3. Zaveďme označení pro hustotu kamene $\varrho_\mathrm{k} = 2200\,\mathrm{kg/m^3}$, hustotu vody $\varrho_\mathrm{v} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ a hustotu vzduchu $\varrho_\mathrm{vz} = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$, plošný průřez sloupu $S = 0{,}60\,\mathrm{m^2}$ a délku sloupu $d = 8\,\mathrm{m}$; tíhové zrychlení $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, výšky $h_1 = 0\,\mathrm{m}$, $h_2 = 26\,\mathrm{m}$, $h_0 = 20\,\mathrm{m}$. Hmotnost sloupu je $m = S \cdot d \cdot \varrho_\mathrm{k} = 10\,560\,\mathrm{kg}$, tíhová síla $F_\mathrm{g} = m \cdot g = 105{,}6\,\mathrm{kN}$.

a) Vztlaková síla působící na sloup celý ponořený ve vodě bude $F_\mathrm{vz1} = S \cdot d \cdot \varrho_\mathrm{v} \cdot g = 48\,\mathrm{kN}$, vztlaková síla působící na sloup ve vzduchu po vytažení z vody bude $F_\mathrm{vz2} = S \cdot d \cdot \varrho_\mathrm{v} \cdot g = 57{,}6\,\mathrm{N}$. Jeřáb tak na sloup zcela ponořený ve vodě musí působit silou $F_1 = F_\mathrm{g} - F_\mathrm{vz1} = 57{,}6\,\mathrm{kN}$, na sloup vytažený z vody silou $F_2 = F_\mathrm{g} - F_\mathrm{vz2} = 105{,}542\,\mathrm{kN} \approx F_\mathrm{g}$, tedy téměř rovnou tíhové síle F_g. **2 body**

b) Graf je na obr. 2. **3 body**



Obr. 2: Závislost $F = F(h)$ k úloze **3**.

c) Pokud je sloup celý ve vodě, tj. $h_1 \leqq h \leqq h_0 - d = 12\,\mathrm{m}$, působí jeřáb silou F_1 a vykoná práci $W_1 = F_1 \cdot (h_0 - d) = 691{,}2\,\mathrm{kJ}$. Pokud je sloup celý vynořen, tj. $h_0 \leqq h \leqq h_2$, působí jeřáb silou F_2 a vykoná práci

$W_2 = F_2 \cdot (h_2 - h_0) = 633{,}3\,\mathrm{kJ}$. Práce při vynořování, kdy se mění síla působící na sloup, bude dána obsahem lichoběžníka v grafu na obr. 2 ohraničeném hodnotami $h_0 - d = 12\,\mathrm{m}$, $h_0 = 20\,\mathrm{m}$, F_1 a F_2. Výpočtem dostáváme $W_3 = 1/2 \cdot (F_1 + F_2) \cdot [h_0 - (h_0 - d)] = 1/2 \cdot (F_1 + F_2) \cdot d = 652{,}6\,\mathrm{kJ}$, celkem $W = W_1 + W_2 + W_3 = 1\,977{,}0\,\mathrm{kJ}$. Pokud počítáte s $F_2 = F_\mathrm{g}$, vyjde $W_2 = 633{,}6\,\mathrm{kJ}$, $W_3 = 652{,}8\mathrm{kJ}$ a $W = 1\,977{,}6\,\mathrm{kJ}$. **3 body**

d) Pro výkon platí $P = F \cdot v$, kde $v = 20\,\mathrm{cm/s} = 0{,}20\,\mathrm{m/s}$. Postupně dostaneme $P_1 = F_1 \cdot v = 11{,}52\,\mathrm{kW}$, $P_2 = F_1 \cdot v = 21{,}11\,\mathrm{kW}$, $P_3 \in (P_1, P_2)$. **2 body**

4. a) Odporovou sílu vypočteme dosazením do vztahu $F_\mathrm{O} = kv^2$ ze zadání úlohy, konkrétní hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1. **3 body**

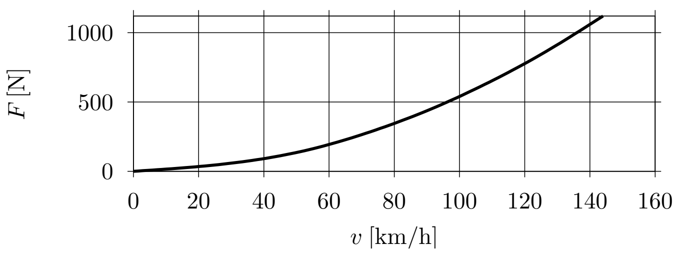
b) Pro výkon platí $P = F \cdot v = kv^3$, číselné hodnoty jsou opět v tabulce 1. **1 bod**

c) Platí vztah $V \cdot H \cdot \eta = F \cdot s$, kde F je požadovaná tahová síla motoru, V je objem spotřebovaného benzínu, $H = 35{,}0\,\mathrm{MJ/m^3}$ jeho výhřevnost, s dráha ujetá automobilem a $\eta = 20\,\%$ účinnost přeměny tepla na mechanickou práci. Pro spotřebu na dráze $s = 100\,\mathrm{km}$ odtud vychází $V_{100} = F \cdot s / (H \cdot \eta) = \{\mathrm{F}\}/70\,\mathrm{l}$. Konkrétní číselné hodnoty jsou v tabulce 1. **3 body**

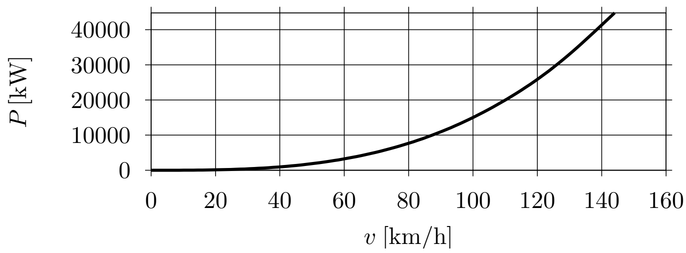
d) Závislosti $F = F(v)$, $P = P(v)$, $V_{100}(v)$ jsou vykresleny na obr. 3a-c. **3 body**

v [km/h]	v [m/s]	F [N]	P[kW]	V_{100} [l]
72	20	280,0	5 600,0	4,00
90	25	437,5	10 937,5	6,25
108	30	630,0	18 900,0	9,00
126	35	857,5	30 012,5	12,25
54	15	157,5	2 362,5	2,25
144	40	1 120,0	44 800,0	16,00

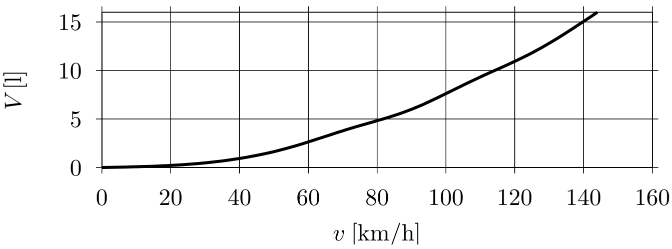
Tabulka 1: K úloze **4**.



(a) Závislost $F = F(v)$



(b) Závislost $P = P(v)$



(c) Závislost $V = V(v)$

Obr. 3: K úloze **4**.

5. Označme požadovaný výkon $P = 500\,\mathrm{MW}$.

a) Nedostatků i předností je mnoho, úvahy soutěžících budou hodnoceny individuálně. **2 body**

b) Pro výšku přehrady $h = 50\,\mathrm{m}$ a hustotu vody $\varrho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ platí $P = Q_V \cdot \varrho \cdot g \cdot h$, kde Q_V je hledaný průtok. po vyjádření a dosazení $Q_V = P/(\varrho \cdot g \cdot h) = 1000\,\mathrm{m^3/s}$. Takový průtok je u nás těžko dosažitelný (např. 13. 5. 2004 mělo Labe v Děčíně průtok $216\,\mathrm{m^3/s}$). **3 body**

c) Označme hmotnost uhlí v jednom vagónu $m_\mathrm{v} = 40\,\mathrm{t}$. Spálením n vagónů uhlí o výhřevnosti $H_1 = 30\,\mathrm{MJ/kg}$ získáme teplo $Q = n \cdot m_\mathrm{v} \cdot H_1 = n \cdot 1200\,\mathrm{GJ}$, z něhož se k výrobě elektřiny využije pouze 36 %. Za jeden den, tj. za čas $\tau = 24\,\mathrm{h} = 86\,400\,\mathrm{s}$ musí elektrárna dodat energii $E = P \cdot \tau = 43\,200\,\mathrm{GJ}$. Počet vagónů, které musíme za jeden den dodat určíme z rovnice $P \cdot \tau = n \cdot m_\mathrm{v} \cdot H_1 \cdot \eta$, takže $n = P \cdot \tau / (m_\mathrm{v} \cdot H_1 \cdot \eta) = 100$ vagónů (za jeden den se spálí $n \cdot m_\mathrm{v} = 4000\,\mathrm{t}$ uhlí). **3 body**

d) oproti c) je $H_2 = 12\,\mathrm{MJ/kg}$. Pro počet vagónů vychází $n_2 = P \cdot \tau / (m_\mathrm{v} \cdot H_2 \cdot \eta) = 250$ vagónů (za jeden den se spálí $n_2 \cdot m_\mathrm{v} = 10\,000\,\mathrm{t}$ uhlí). **2 body**