Řešení úloh regionálního kola 46. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie E

1. Cyklistické závody

a) Celková délka jednoho kolečka je $d = 720\,\mathrm{m}$, Martin ho ujede za $t_\mathrm{m} = d/v_\mathrm{m} = 720/9 = 80\,\mathrm{s}$, Jana za $t_\mathrm{j} = d/v_\mathrm{j} = 720/6 = 120\,\mathrm{s}$; protože jedou pět koleček, bude Martin na trati celkem po dobu $5t_\mathrm{m} = 400\,\mathrm{s}$, Jana po dobu $5t_\mathrm{j} = 600\,\mathrm{s}$. **2 body**

b) Když oba vyrazí stejným směrem, potom za dobu t urazí Martin dráhu $v_\mathrm{m}t = 9t$, Jana $v_\mathrm{j}t = 6t$. Pro čas t_1, ve kterém Martin Janu předjede, musel ujet o jeden okruh, tj. o vzdálenost d navíc, takže platí $v_\mathrm{m}t_1 = v_\mathrm{j}t_1 + d$, neboli $9t_1 = 6t_1 + d$. Odtud $t_1 = d/\left(v_\mathrm{m}t - v_\mathrm{j}t\right) = 720/3 = 240\,\mathrm{s}$. Jana urazí za tuto dobu vzdálenost $v_\mathrm{j}t_1 = 1440\,\mathrm{m} = 2d$, Martin $v_\mathrm{m}t_1 = 2160\,\mathrm{m} = 3d$, setkají se tedy na začátku okruhu, kdy $s = 0\,\mathrm{m}$. Pro čas t_2 dalšího setkání by muselo platit $v_\mathrm{m}t_1 = v_\mathrm{j}t_1 + 2d$, neboli $t_2 = 2d/\left(v_\mathrm{m}t - v_\mathrm{j}t\right) = 2 \cdot 720/3 = 480\,\mathrm{s}$. Protože však Martin skončil svůj pátý okruh v čase $400\,\mathrm{s}$, setkají se během tréninku pouze jednou. **2 body**

c) Když jedou proti sobě, potom platí $v_\mathrm{m}t_1 + v_\mathrm{j}t_1 = d$, neboli $t_1 = d/\left(v_\mathrm{m} + v_\mathrm{j}\right) = 720/15 = 48\,\mathrm{s}$. Jana urazí za tuto dobu $v_\mathrm{j}t_1 = 288\,\mathrm{m}$, Martin $v_\mathrm{m}t_1 = 432\,\mathrm{m}$. Další setkání nastanou v časech $t_2 = 2t_1 = 96\,\mathrm{s}$, $t_3 = 3t_1 = 144\,\mathrm{s}, \ldots\, t_8 = 8t_1 = 384\,\mathrm{s}$, potom už Martin opět skončí trénink; celkem se potkají 8-krát. Při druhém setkání bude Jana ve vzdálenosti $s = v_\mathrm{j}t_2 = 576\,\mathrm{m}$ od počátku okruhu. **2 body**

d) Doba jízdy Martina bude o $t_\mathrm{z} = 60\,\mathrm{s}$ kratší, píšeme $t - t_\mathrm{z}$. Pro čas t_1, v němž Martin Janu dohoní bude platit $v_\mathrm{m}\left(t_1 - t_\mathrm{z}\right) = v_\mathrm{j}t_1$, neboli $9\left(t_1 - 60\right) = 6t_1$. Potom vychází

$$t_1 = \frac{v_\mathrm{m}t_\mathrm{z}}{v_\mathrm{m} - v_\mathrm{j}} = \frac{540}{3} = 180\,\mathrm{s}.$$

Oba cyklisté ujedou do té doby stejnou dráhu $v_\mathrm{j}t_1 = 1080\,\mathrm{m}$ a budou ve vzdálenosti $s = 1080 - 720 = 360\,\mathrm{m}$ od začátku okruhu. Při dalším setkání už bude Martin muset ujet o okruh navíc podobně jako v případě b); dojde k němu v čase

$$t_2 = \frac{v_\mathrm{m}t_\mathrm{z} + d}{v_\mathrm{m} - v_\mathrm{j}} = \frac{540 + 720}{3} = 420\,\mathrm{s}$$

od startu Jany. Jana za tu dobu ujede dráhu $v_\mathrm{j}t_2 = 2520\,\mathrm{m}$, a bude ve vzdálenosti $s = v_\mathrm{j}t_2 - 3d = 2520 - 3 \cdot 720 = 360\,\mathrm{m}$ od začátku okruhu. **2 body**

e) Grafický záznam pohybu pomocí závislosti $s(t)$ pro případy b)–d) je na obr. 1–3; pohyb Jany je znázorněn plnou čarou, pohyb Martina čárkovanou. **2 body**

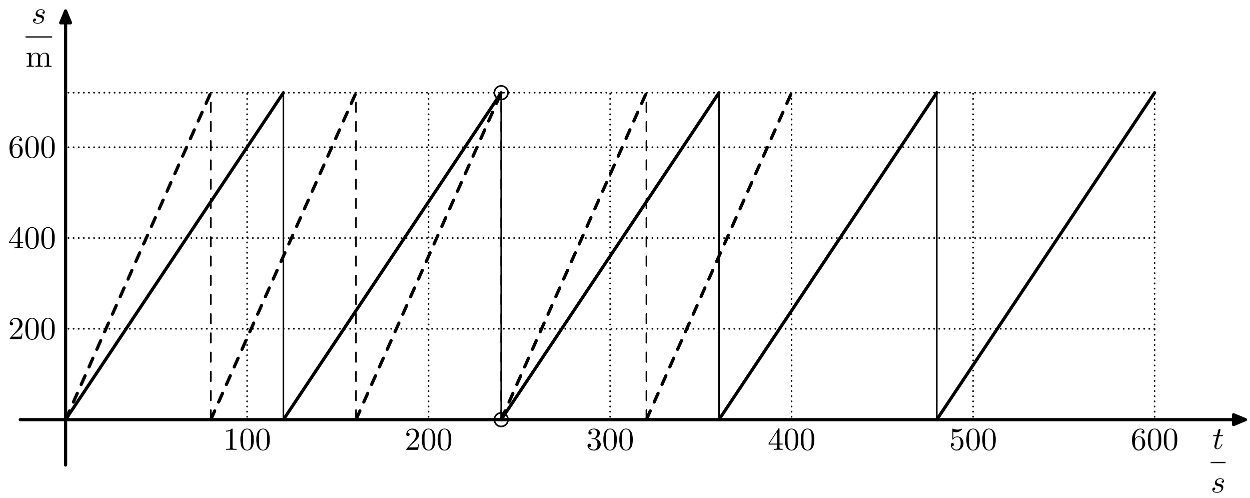
2. Sud s vodou v zahradě

a) Označme $h = 70\,\mathrm{cm}$ výšku sudu a $h_1 = 70 - 30 = 40\,\mathrm{cm}$ výšku vody v něm. Je-li objem celého sudu $V = 280\,\mathrm{l} = 0{,}280\,\mathrm{m}^3$, potom na počátku bylo v sudu $V_1 = Vh_1/h = 280 \cdot 40/30 = 160\,\mathrm{l} = 0{,}160\,\mathrm{m}^3$ vody o teplotě $t_0 = 0°\mathrm{C}$ přiteklo $V_2 = V\left(h - h_1\right)/h = 280 \cdot 30/70 = 120\,\mathrm{l} = 0{,}120\,\mathrm{m}^3$ vody o teplotě $t_{15} = 15°\mathrm{C}$. Přiteče-li $q_1 = 8\,\mathrm{l/min}$, nateče objem V_2 za čas $T = V_2/q_1 = 120/8 = 15\,\mathrm{min}$. Výslednou teplotu t určíme z kalorimetrické rovnice $V_1\left(t - t_0\right) = V_2\left(t_{15} - t\right)$, odkud

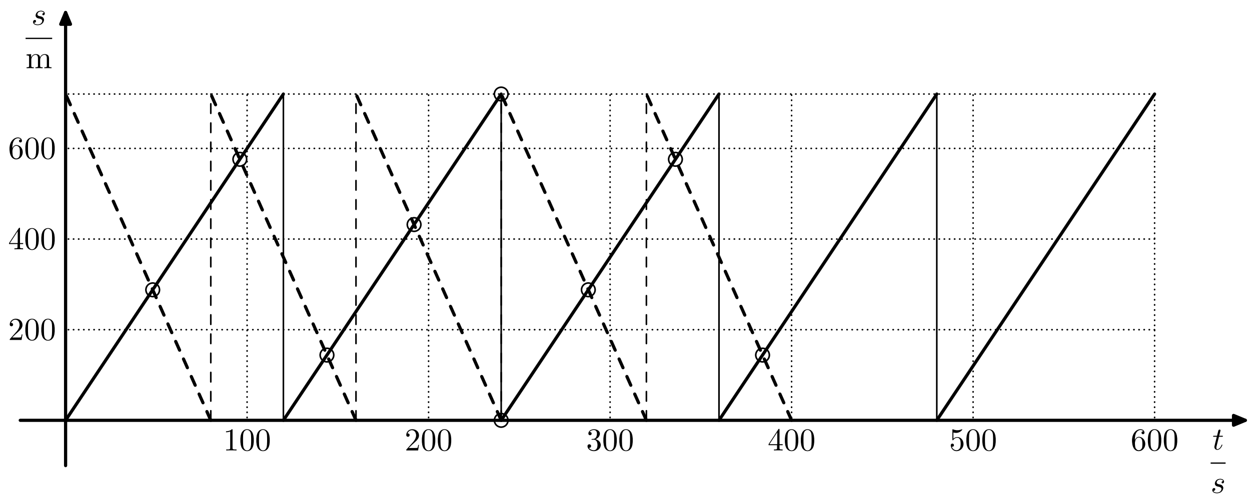
$$t = \frac{V_2t_{15} + V_1t_0}{V_1 + V_2} = \frac{120 \cdot 15 + 160 \cdot 0}{120 + 160} \doteq 6{,}4°\mathrm{C}.$$

3 body

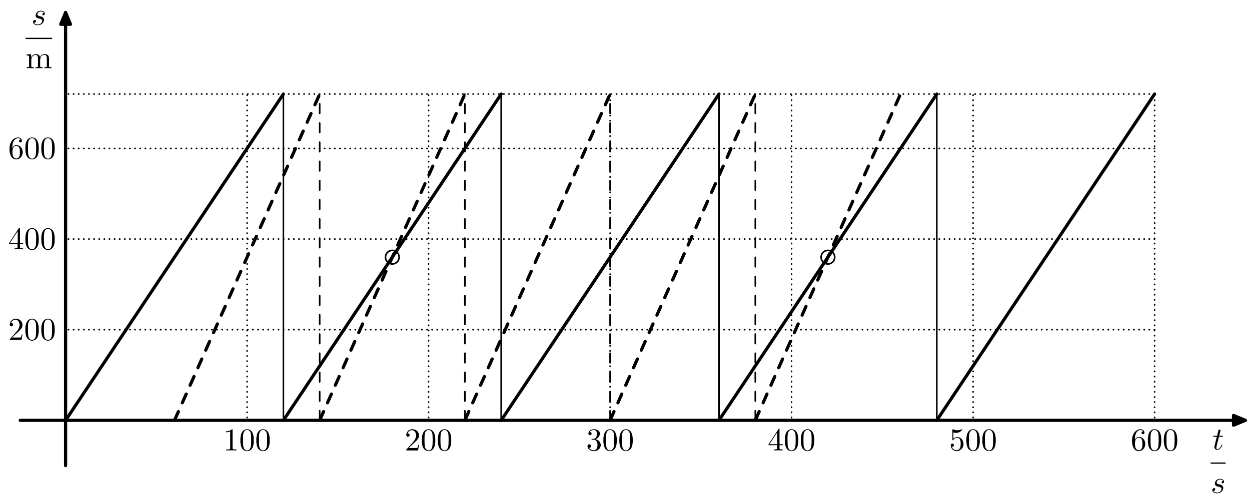
b) V sudu bylo $V_1 = 160\,\mathrm{l}$ vody teploty $t_0 = 0°\mathrm{C}$, přiteklo $V_2 = 120\,\mathrm{l}$ vody, jejíž teplotu t_v máme určit. Voda naplnila sud opět za $T = 15\,\mathrm{min}$, přičemž $V_{21} = 5V_2/8 = 75\,\mathrm{l}$ mělo



Obr. 1: Pohyb cyklistů v případě b) – oba jedou stejným směrem



Obr. 2: Pohyb cyklistů v případě c) – Martin jede opačným směrem



Obr. 3: Pohyb cyklistů v případě d) – Martin začíná o 60 s později

teplotu $t_{15} = 15°\mathrm{C}$ a $V_{22} = 3V_2/8 = 45\,\mathrm{l}$ mělo teplotu $t_{60} = 60°\mathrm{C}$. Z kalorimetrické rovnice $V_{21}\,(t_v - t_{15}) = V_{22}\,(t_{60} - t_v)$ najdeme výslednou teplotu přitékající vody

$$t_v = \frac{V_{21}t_{15} + V_{22}t_{60}}{V_{21} + V_{22}} = \frac{75 \cdot 15 + 45 \cdot 60}{75 + 45} \doteq 31{,}9°\mathrm{C}.$$

Tato voda se smíchá s vodou o teplotě t_0 v sudu, takže výsledná teplota vody v sudu t z kalorimetrické rovnice $V_1\,(t - t_0) = V_2\,(t_v - t)$, odkud

$$t = \frac{V_2 t_v + V_1 t_0}{V_1 + V_2} = \frac{120 \cdot 31{,}9 + 160 \cdot 0}{120 + 160} \doteq 13{,}7°\mathrm{C}.$$

3 body

c) Nyní je na počátku v sudu jen $V_3 = 280 \cdot 30/70 = 120\,\mathrm{l} = 0{,}120\,\mathrm{m}^3$ vody o teplotě $t_0 = 0°\mathrm{C}$ a $V_4 = 280 \cdot 10/70 = 40\,\mathrm{l} = 0{,}040\,\mathrm{m}^3$ ledu. Hmotnost ledu $m_\mathrm{L} = \varrho_L V_4$, kde $\varrho_L = 910\,\mathrm{kg/m^3}$ je hustota ledu; v sudu je tak $m_\mathrm{L} = 36{,}4\,\mathrm{kg}$ ledu o teplotě t_0. Pokud jako v případě a) přiteče do sudu voda o objemu $V_2 = 120\,\mathrm{l} = 0{,}120\,\mathrm{m}^3$ a teplotě $t_{15} = 15°\mathrm{C}$, potom při ohlazení na $t_0 = 0°\mathrm{C}$ tato voda odevzdá teplo $Q = \varrho_v V_2 c\,(t_{15} - t_0)$, kde $\varrho_v = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ je hustota vody, a $c = 4200\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)}$ její měrná tepelná kapacita. Číselně $Q = 1000 \cdot 0{,}120 \cdot 4200 \cdot\ (15 - 0) =$ $= 7{,}56\,\mathrm{MJ}$. Nato, aby roztál všechen led je potřeba teplo $Q_1 = m_\mathrm{L} l_\mathrm{t}$, kde $l_\mathrm{t} = 330\,\mathrm{kJ/kg}$ je měrné skupenské teplo tání ledu. Číselně $Q_1 = 36{,}4 \cdot 330\,000 = 12\,\mathrm{MJ}$. Protože $Q_1 > Q$, neroztaje ani všechen led a výsledná směs bude mít teplotu $t_0 = 0°\mathrm{C}$.
Podruhé přitékala voda o objemu $V_2 = 120\,\mathrm{l}$ a teplotě $t_v = 31{,}9°\mathrm{C}$. Kalorimetrickou rovnici zapíšeme ve tvaru

$$\varrho_\mathrm{v} V_3 c\,(t - t_0) + m_\mathrm{L} c\,(t - t_0) + m_L l_\mathrm{t} = \varrho_\mathrm{v} V_2 c\,(t_v - t)\,,$$

kde první člen nalevo odpovídá teplu na ohřátí vody v sudu, druhý teplu na ohřátí roztátého ledu, třetí teplu potřebnému na roztátí ledu a na pravé straně je teplo odevzdané přiteklou vodou. Vychází

$$\begin{aligned} t &= \frac{\varrho_\mathrm{v} V_2 c t_v + c\,(\varrho_\mathrm{v} V_3 + m_\mathrm{L})\,t_0 - m_\mathrm{L} l_\mathrm{t}}{\varrho_\mathrm{v} c\,(V_2 + V_3) + m_\mathrm{L} c} = \\ &= \frac{1000 \cdot 0{,}120 \cdot 4200 \cdot 31{,}9 + 4200 \cdot\ (1000 \cdot 0{,}120 + 36{,}4)\ \cdot 0 - 36{,}4 \cdot 330\,000}{1000 \cdot\ (0{,}120 + 0{,}120)\ \cdot 4200 + 36{,}4 \cdot 4200} \doteq 3{,}5°\mathrm{C}. \end{aligned}$$

Výsledná teplota vody v sudu bude v tomto případě 3,5°C. **4 body**

3. Automobil překonává odporové síly

Označme rychlost na dálnici $v_d = 126\,\mathrm{km/h} = 35\,\mathrm{m/s}$, rychlost na silnici $v_s = 90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m/s}$ a rychlost v obci $v_o = 54\,\mathrm{km/h} = 15\,\mathrm{m/s}$.

a) Automobil překonává odporovou sílu $F = kv_d^2 + 0{,}007\,mg = 0{,}64 \cdot 35^2 + 0{,}007 \cdot 1200 \cdot 10 =$ $= 868\,\mathrm{N}$. Na dráze $s = 105\,\mathrm{km} = 105\,000\,\mathrm{m}$ vykoná práci $W = Fs = 868 \cdot 105\,000 = 91{,}1\,\mathrm{MJ}$. Vzdálenost urazí za čas $t = s/v_d = 105\,000/35 = 3\,000\,\mathrm{s} = 50\,\mathrm{min}$. Jeho výkon vypočteme pomocí vztahu $P = W/t = Fs/t = Fv_s = 868 \cdot 35 = 30{,}4\,\mathrm{W}$. **4 body**

b) Z celkové trasy pojede automobil 15 %, tj. $s_o = 1{,}5\,\mathrm{km}$ v obci rychlostí v_o a 85 %, tj. $s_s = 8{,}5\,\mathrm{km}$ mimo obec rychlostí v_s. Mimo obec musí vyvinout tahovou sílu $F_s = kv_s^2 +$ $+ 0{,}007\,mg = 0{,}64 \cdot 25^2 + 0{,}007 \cdot 1200 \cdot 10 = 484\,\mathrm{N}$, v obci $F_o = kv_o^2 + 0{,}007\,mg = 0{,}64 \cdot 15^2 +$ $+ 0{,}007 \cdot 1200 \cdot 10 = 228\,\mathrm{N}$, odpovídající výkon je pak $P_s = F_s v_s = 484 \cdot 25 = 12{,}1\,\mathrm{kW}$ a $P_o = F_o v_o = 228 \cdot 15 = 3{,}4\,\mathrm{kW}$, vykonaná práce $W_s = F_s s_s = 484 \cdot 8\,500 = 4{,}1\,\mathrm{MJ}$ a $W_o = F_o s_o = 228 \cdot 1\,500 = 340\,\mathrm{kJ}$, doba jízdy mimo obec a v obci pak vychází $t_s = s_s/v_s =$ $= 8\,500/25 = 340\,\mathrm{s}$ a $t_o = s_o/v_o = 1\,500/15 = 100\,\mathrm{s}$. Celkový čas je $t = 340 + 100 = 440\,\mathrm{s}$.
3 body

c) Pokud při spálení 1 kg benzínu získáme 46 MJ tepla a na dálnici se využije pouze 24 %, tj. $0{,}24 \cdot 46 = 11\,\mathrm{MJ}$, potom na práci vykonanou v části a) spotřebujeme $m_d = 91{,}1/11 \doteq 8{,}3\,\mathrm{kg}$ benzínu, což odpovídá objemu $V_d = m_d/\varrho = 8{,}3/720 = 11{,}6\,\mathrm{l}$ na 105 km. Na 100 km pak automobil spotřebuje $11{,}6 \cdot 100/105 \doteq 11\mathrm{l}$. Při jízdě po silnici se využije z jednoho spáleného kg benzínu pouze 19 %, tj. $0{,}19 \cdot 46 = 8{,}7\,\mathrm{MJ}$. Na vykonanou práci $W_s + W_o = 4{,}1 + 0{,}34 = 4{,}44\,\mathrm{MJ}$ tak spotřebujeme $m_{so} = 4{,}44/8{,}7 = 0{,}506\,\mathrm{kg}$ benzínu, tj. objem $V_{so} = m_{so}/\varrho = 0{,}506/720 \doteq 0{,}0007\,\mathrm{m}^3 = 0{,}7\,\mathrm{l}$ na 10 km. Na 100 km pak bude spotřeba 10-krát větší, tj. 7 l na 100 km. **3 body**

Poznámka: uvedené údaje nejsou z reklamních důvodů vztahovány k žádnému určitému druhu osobního automobilu.

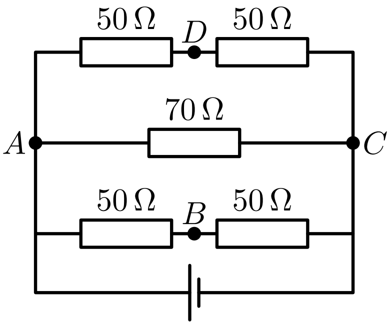
4. Drátěný čtverec

a) Jde o tři paralelní větve s odpory 100 Ω, 70 Ω, 100 Ω, výsledný odpor vychází $R = 29{,}2\,\Omega$, proud v přívodních vodičích $I = U/R = 3/29{,}2 = 0{,}103\,\mathrm{A}$, výkon $P = RI^2 = U^2/R = 0{,}309\,\mathrm{W}$. **3 body**

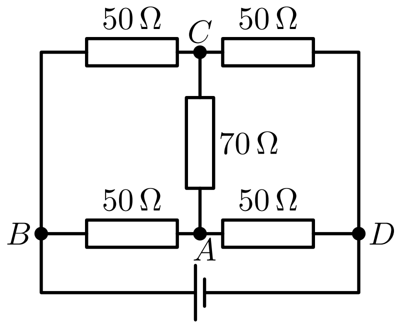
b) V tomto případě bude výsledný odpor $R = 32{,}3\,\Omega$, přívodními vodiči prochází proud $I = U/R = 3/32{,}2 = 0{,}093\,\mathrm{A}$, výkon $P = RI^2 = U^2/R = 0{,}279\,\mathrm{W}$. **3 body**

c) Vzhledem k souměrnosti je tento případ stejný jako předchozí b). **1 bod**

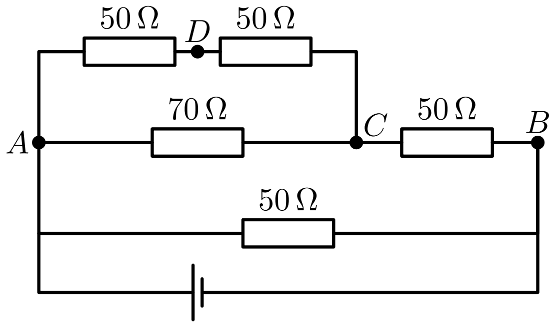
d) Toto zapojení je obtížné – na vodiči AD je napětí 1,5 V, na vodiči AB také 1,5 V, stejně tak na vodičích CB a CD. Proto je na vodiči AC nulové napětí, elektrický proud jím neprochází (procházející proud je nulový), a tak je možno ho ze sítě vyjmout. Potom je řešení velmi jednoduché – dvě paralelní větve s odporem $2R_1 = 100\,\Omega$, výsledný odpor je poloviční, tj. $R = R_1 = 50\,\Omega$, přívodními vodiči prochází proud $I = U/R = 3/50 = 0{,}060\,\mathrm{A}$, výkon $P = RI^2 = U^2/R = 0{,}180\,\mathrm{W}$. **3 body**



K případu a)



K případu d)



K případu b)