Řešení úloh krajského kola 48. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie E

1. Nová dálnice

Pro splnění požadovaných úkolů musíme vypočítat čas, za který urazilo vozidlo 2. a 3. úsek trasy před dokončením dálnice. Pro druhý úsek platí $s_{12} = 45\,\text{km}$, $v_{12} = 120\,\text{km/h}$, pro dobu jízdy ve druhém úseku pak vychází $t_{12} = s_{12}/v_{12} = 45/120 = 0{,}375\,\text{h} = 22{,}5\,\text{min}$. Pro třetí úsek pak po sečtení času jízdy mimo obce a času jízdy obcemi vychází $t_{13} = 30/90 + 20/50 = 0{,}73333\,\text{h} = 44\,\text{min}$.

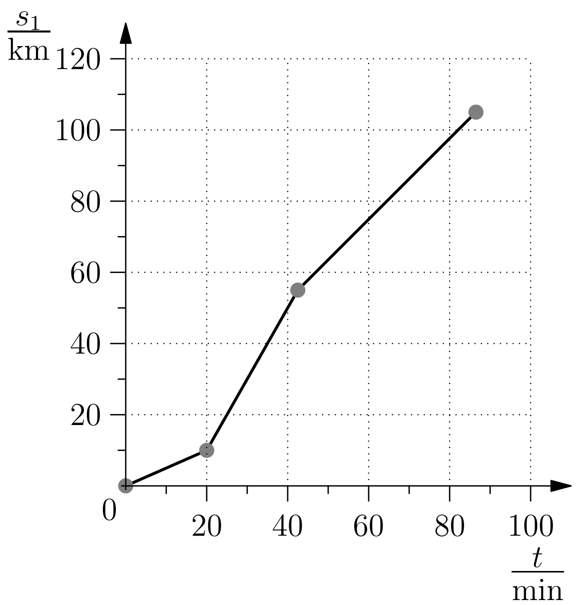
a) $s_1 = 10 + 45 + 50 = 105\,\text{km} < s_2 = 20 + 84 + 14 = 118\,\text{km}$. **1 bod**

b) $t_1 = 20 + 22{,}5 + 44 = 86{,}5\,\text{min} > t_2 = 20 + 40 + 20 = 80\,\text{min}$. **2 body**

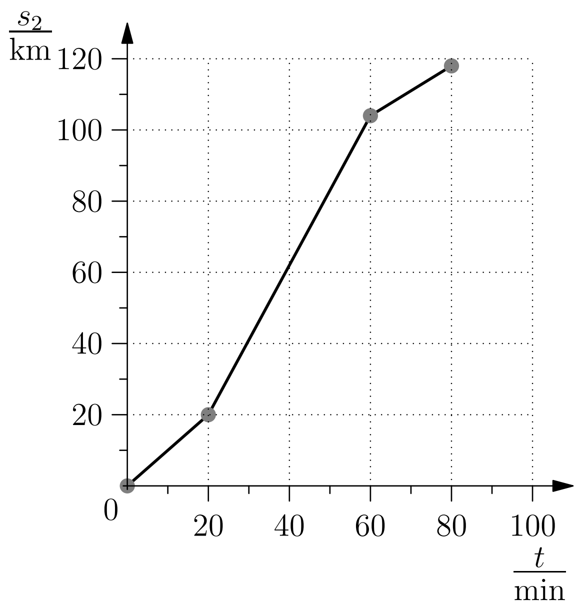
c) $\bar{v}_{13} = s_{13}/t_{13} = 50/0{,}73 = 68{,}2\,\text{km/h}$. **1 bod**

d) $\bar{v}_1 = s_1/t_1 = 72{,}8\,\text{km/h} < \bar{v}_2 = s_2/t_2 = 88{,}5\,\text{km/h}$. **1 bod**

e) Grafy **2+2 body**



Obr. 1: Závislost $s_1 = s_1(t)$ dráhy na čase před dokončením dálnice



Obr. 2: Závislost $s_2 = s_2(t)$ dráhy na čase po dokončení dálnice

f) Zde se hodnotí jakékoli rozumné vyjádření a srovnání – jízda po dokončené dálnici trvá kratší dobu (a v praxi by byl rozdíl ještě výraznější než v našem modelu), stále rostoucí provoz bude po dálnici plynulejší, kamionová doprava se vyhne obcím apod. **1 bod**

2. Vaříme vodu

a) Pro hustotu vody $\varrho = 1\,000\,\text{kg/m}^3$, měrnou tepelnou kapacitu $c = 4\,200\,\text{J/(kg}\cdot{}^\circ\text{C)}$, objem $V = 1{,}2\,\text{l} = 0{,}0012\,\text{m}^3$ a rozdíl teplot $\Delta t = 100 - 15 = 85^\circ\text{C}$ vychází teplo potřebné kohřátí vody $Q = m \cdot c \cdot \Delta t = V \cdot \varrho \cdot c \cdot \Delta t = 0{,}0012 \cdot 1\,000 \cdot 4\,200 \cdot 85 = 428{,}4\,\text{kJ}$. **1 bod**

Pro účinnost $\eta = 85\,\%$ pak získáme potřebnou elektrickou práci $W_\text{e} = Q/\eta = 428{,}4/0{,}85 = 504\,\text{kJ}$. **1 bod**

b) Dobu zahřívání vody při příkonu $P = 2\,000\,\text{W}$ vypočteme ze vztahu

$$\tau = \frac{W_\text{e}}{P} = \frac{Q}{\eta \cdot P} = \frac{V \cdot \varrho \cdot c \cdot \Delta t}{\eta \cdot P} = \frac{428\,400}{0{,}85 \cdot 2\,000} = 252\,\text{s} = 4\,\text{min}\ 12\,\text{s}.$$

1 bod

c) Pro výhřevnost uhlí $H_\text{u} = 30\,\text{MJ/kg}$ a účinnost spalování $\eta_\text{u} = 36\,\%$ vychází potřebná hmotnost uhlí (zanedbáme-li ztráty při vedení)

$$m_\text{u} = \frac{W_\text{e}}{\eta_\text{u} \cdot H_\text{u}} = \frac{504\,000}{0{,}36 \cdot 30\,000\,000} = 0{,}047\,\text{kg}.$$

2 body

d) Podobně pro výhřevnost propan-butanu $H_\mathrm{p} = 50\,\mathrm{MJ/kg}$ a účinnost spalování $\eta_\mathrm{p} = 50\,\%$ vychází

$$m_\mathrm{p} = \frac{Q}{\eta_\mathrm{p} \cdot H_\mathrm{p}} = \frac{428\,400}{0{,}50 \cdot 50\,000\,000} = 0{,}0171\,\mathrm{kg};$$

zde však počítáme pouze s teplem Q potřebným na ohřátí vody a ne s dodanou elektrickou prací W_e.
2 body

e) Stejný výpočet pro zemní plyn s výhřevností $H_\mathrm{z} = 34{,}2\,\mathrm{MJ/m^3}$ a účinnost spalování $\eta_\mathrm{z} = 50\,\%$ vychází

$$V_\mathrm{z} = \frac{Q}{\eta_\mathrm{z} \cdot H_\mathrm{z}} = \frac{428\,400}{0{,}50 \cdot 34\,200\,000} = 0{,}0251\,\mathrm{m^3}.$$

2 body

f) Zde se opět hodnotí jakékoli rozumné vyjádření – např. spotřeba propan-butanu je menší než spotřeba uhlí, nevzali jsme však v úvahu energii potřebnou na plnění a rozvoz lahví s plynem, výrobu propan-butanu z ropy, která se podobně jako zemní plyn k nám musí dovážet apod. **1 bod**

3. Doprava trubek

a) Hustota duralu $\varrho_\mathrm{d} = 2\,700\,\mathrm{kg/m^3}$ je větší než hustota vody $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$, trubka se proto potopí.
1 bod

b) Označme poloměr trubky $r = 0{,}025\,\mathrm{m}$, její tloušťku $d = 0{,}005\,\mathrm{m}$ a její délku (výšku) $h = 5\,\mathrm{m}$. Objem zaslepené trubky je $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 0{,}025^2 \cdot 5 \approx 0{,}0098\,\mathrm{m^3} = 9\,800\,\mathrm{cm^3}$. Označíme-li $r_1 = r - d = 0{,}02\,\mathrm{m}$ vnitřní poloměr trubky, dostáváme pro její objem (objem vyplněný duralem) $V_\mathrm{d} = \pi \cdot \left(r^2 - r_1^2\right)\right) \cdot h = \pi \cdot \left(0{,}025^2 - 0{,}02^2\right) \cdot 5 \approx 0{,}00353\,\mathrm{m^3} = 3\,530\,\mathrm{cm^3}$ Hmotnost trubky $m = \varrho_\mathrm{d} \cdot V_\mathrm{d} = 2\,700 \cdot 0{,}00353 \approx 9{,}54\,\mathrm{kg}$, její tíha $F_\mathrm{G} = m_\mathrm{d} \cdot g = 95{,}4\,\mathrm{N}$. Vztlaková síla působící na ponořenou trubku $F_\mathrm{vz} = V \cdot \varrho_\mathrm{v} \cdot g \approx 98{,}2\,\mathrm{N}$. Protože $F_\mathrm{vz} > F_\mathrm{G}$, trubka se nepotopí. **3 body**

c) Hmotnost 10-ti trubek bude $m_{10} = 10m = 95{,}4\,\mathrm{kg}$, objem vytlačený 10 zacpanými trubkami $V_{10} = 10V = 0{,}098\,\mathrm{m^3}$ a odpovídající největší možná vztlaková síla $F_\mathrm{vz10} = V_{10} \cdot \varrho_\mathrm{v} \cdot g \approx 980\,\mathrm{N}$. Označíme-li hmotnost veslařů $m' = 200\,\mathrm{kg}$, bude celková hmotnost nákladu $m_{10} = m + m' = 295{,}4\,\mathrm{kg}$ a celková tíha nákladu $F_\mathrm{G10} = m_{10} \cdot g \approx 2950\,\mathrm{N}$. Nyní ovšem platí $F_\mathrm{vz10} < F_\mathrm{G10}$; uvažovaný vor proto nelze použít. **3 body**

d) Označme poloměr bambusové tyče $r_b = 0{,}03\,\mathrm{m}$ a její délku (výšku) $h_\mathrm{b} = 6\,\mathrm{m}$. Objem bambusové tyče je $V_\mathrm{b} = \pi \cdot r_\mathrm{b}^2 \cdot h_\mathrm{b} = \pi \cdot 0{,}03^2 \cdot 6 \approx 0{,}017\,\mathrm{m^3}$. Hustota mořské vody podle zadání $\varrho_\mathrm{mv} = 1\,030\,\mathrm{kg/m^3}$, proto maximální vztlaková síla působící na 20 ponořených tyčí bude $F_\mathrm{vzb} = 20 \cdot V_\mathrm{b} \cdot \varrho_\mathrm{mv} \cdot g \approx 3\,500\,\mathrm{N}$. Je-li hmotnost jedné tyče $m_\mathrm{b} = 3\,\mathrm{kg}$, jejich celková tíha bude $F_\mathrm{Gb} = 20 \cdot m_\mathrm{b} \cdot g = 600\,\mathrm{N}$. Rozdíl mezi vztlakovou silou a tíhou tyčí udává tíhu možného nákladu $F_\mathrm{vzb} - F_\mathrm{Gb} = 3\,500 - 600 = 2\,900\,\mathrm{N}$, což odpovídá nosnosti asi $290\,\mathrm{kg}$. **3 body**

4. Žárovky z krabice

a) Provozní proudy žárovek vypočítáme z výkonu P a napětí U podle vztahu $I = \dfrac{P}{U}$, pro první žárovku vychází $I_1 = 15/6 = 2{,}5\,\mathrm{A}$, pro druhou $I_2 = 50/6 \approx 8{,}33\,\mathrm{A}$. **2 body**

Pro odpory žárovek platí $R = \dfrac{U^2}{P}$; pro první žárovku vychází $R_1 = 6^2/15 = 2{,}4\,\Omega$, pro druhou $R_2 = 6^2/50 = 0{,}72\,\Omega$. **2 body**

b) Petr může použít buď sériové nebo paralelní zapojení. Při sériovém zapojení bude výsledný odpor $R = R_1 + R_2 = 3{,}12\,\Omega$ a oběma žárovkami bude protékat proud $I_\mathrm{s} = U_1/R = 12/3{,}12 \approx 3{,}84\,\mathrm{A}$. Protože $I_1 < I_\mathrm{s} < I_2$, první žárovka se přepálí a proud se přeruší.
Při paralelním zapojení bude na obou žárovkách napětí $U_1 = 12\,\mathrm{V}$ a proudy procházející žárovkami vypočteme pomocí odporů získaných v části a). Vychází $I_\mathrm{p1} = U_1/R_1 = 5\,\mathrm{A}$, $I_\mathrm{p2} = U_1/R_2 \approx 16{,}7\,\mathrm{A}$. V tomto případě $I_\mathrm{p1} > I_1$, $I_\mathrm{p2} > I_2$, takže se přepálí obě žárovky. *Neexistuje* proto zapojení, jak by mohl Petr obě žárovky připojit k baterii s napětím $U_1 = 12\,\mathrm{V}$. **4 body**

c) Při sériovém zapojení, kdy použijeme dvě žárovky prvního typu, bude výsledný odpor $R' = 2R_1 = 4{,}8\,\Omega$ a žárovkami bude protékat proud $I_\mathrm{s1} = U_1/R' = 12/4{,}8 = 2{,}5\,\mathrm{A} = I_1$. Použijeme-li dvě žárovky druhého typu, bude výsledný odpor $R'' = 2R_2 = 1{,}44\,\Omega$ a žárovkami bude protékat proud $I_\mathrm{s2} = U_1/R'' = 12/1{,}44 = 8{,}33\,\mathrm{A} = I_2$. V obou případech prochází žárovkami provozní proud a budou svítit normálně.
Při paralelním zapojení je situace stejná jako v části b); jak jsme zjistili, oba typy žárovek se v paralelních větvích po připojení k baterii přepálí. **2 body**