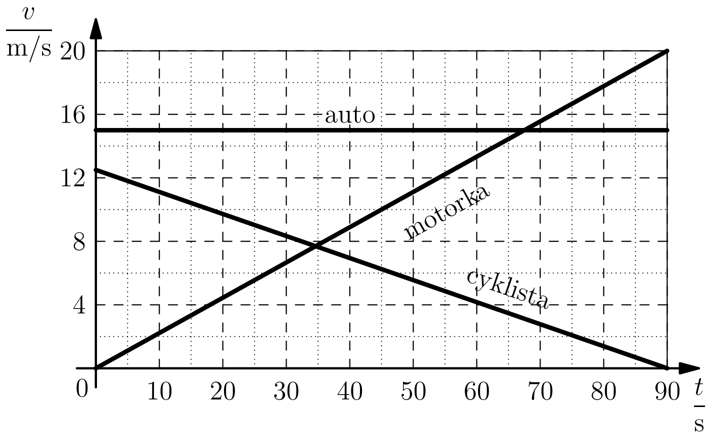
Řešení úloh krajského kola 50. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie E

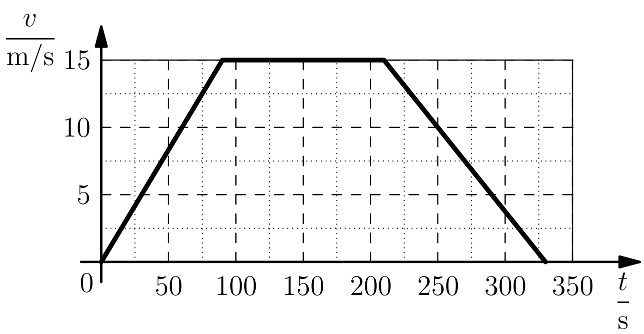
1. Vozidla se pohybují

a) Převedeme rychlosti ze zadání úlohy $v_1 = 54\,\mathrm{km/h} = 15\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$ a $v_3 = 45\,\mathrm{km/h} = 12{,}5\,\mathrm{m/s}$. Grafy závislostí $v(t)$ jsou na obr. 1. Dráha, kterou jednotlivá vozidla urazí, je rovna obsahu plochy ohraničené osou x a grafem závislosti $v(t)$. Pro automobil vychází $s_1 = v_1 \cdot t = 15 \cdot 90 = 1350\,\mathrm{m}$, pro motocykl $s_2 = \frac{1}{2} v_2 t = 0{,}5 \cdot 20 \cdot 90 = 900\,\mathrm{m}$ a pro cyklistu $s_3 = \frac{1}{2} v_3 t = 0{,}5 \cdot 12{,}5 \cdot 90 = 562{,}5\,\mathrm{m}$. **5 bodů**

b) Označme postupně s_1, s_2 a s_3 dráhy, které vlak urazil v úsecích, kdy zrychloval, jel rovnoměrně a brzdil a podobně t_1, t_2 a t_3 časové intervaly, které potřeboval k projetí těchto úseků. Podle zadání $t_1 = 90\,\mathrm{s}$, $t_3 = 2\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$, $s_2 = 1{,}8\,\mathrm{km} = 1800\,\mathrm{m}$ a rychlost ve druhém úseku $v = 54\,\mathrm{km/h} = 15\,\mathrm{m/s}$. Dopočítáme $t_2 = s_2/v = 120\,\mathrm{s}$ a podobně jako v první části úlohy také $s_1 = \frac{1}{2} v t_1 = 0{,}5 \cdot 15 \cdot 90 = 675\,\mathrm{m}$, $s_3 = \frac{1}{2} v t_3 = 0{,}5 \cdot 15 \cdot 120 = 900\,\mathrm{m}$. Celková dráha bude $s = s_1 + s_2 + s_3 = 675 + 1800 + 900 = 3375\,\mathrm{m}$, celkový čas $t = t_1 + t_2 + t_3 = 90 + 120 + 120 = 330\,\mathrm{s}$ a průměrná rychlost $v_\mathrm{p} = s/t = 3375/330 \approx 10{,}2\,\mathrm{m/s} \approx 36{,}8\,\mathrm{km/h}$. Odpovídající závislost $v(t)$ je na obr. 2. **5 bodů**



Obr. 1: Závislost $v(t)$ pro daná vozidla



Obr. 2: Závislost $v(t)$ pro vlak

2. Chlazení čaje

a) Podle zadání je hmotnost sklenice $m_\mathrm{s} = 250\,\mathrm{g} = 0{,}25\,\mathrm{kg}$. Použijeme-li hustotu vody $\varrho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, získáme hmotnost objemu $V = 200\,\mathrm{ml} = 0{,}0002\,\mathrm{m^3}$, tj. hmotnost čaje $m_\mathrm{v} = \varrho V = 1000 \cdot 0{,}0002 = 0{,}2\,\mathrm{kg}$. S pomocí měrných tepelných kapacit skla $c_\mathrm{s} = 840\,\mathrm{J/(kg \cdot ^\circ C)}$ a vody $c_\mathrm{v} = 4200\,\mathrm{J/(kg \cdot ^\circ C)}$ sestavíme kalorimetrickou rovnici

$$m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} (t_{95} - t) = m_\mathrm{s} c_\mathrm{s} (t - t_{20})$$

odkud získáme výslednou teplotu t

$$t = \frac{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} t_{95} + m_\mathrm{s} c_\mathrm{s} t_{20}}{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} + m_\mathrm{s} c_\mathrm{s}} = 80^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

b) Označme objem teplého čaje $V_\text{tč}$ a studeného čaje $V_\text{sč}$. Kalorimetrická rovnice nyní bude mít tvar

$$V_\text{tč} \varrho c_\mathrm{v} (t_{80} - t_{45}) = V_\text{sč} \varrho c_\mathrm{v} (t_{45} - t_{20}) .$$

Pro poměr objemů z ní vychází

$$\frac{V_\text{tč}}{V_\text{sč}} = \frac{t_{45} - t_{20}}{t_{80} - t_{45}} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}, \qquad V_\text{tč} + V_\text{sč} = V = 200\,\mathrm{ml}.$$

Dostáváme $V_\text{tč} = V \cdot \frac{5}{12} \approx 83{,}3\,\mathrm{ml}$ a $V_\text{sč} = V \cdot \frac{7}{12} \approx 116{,}7\,\mathrm{ml}$. **3 body**

c) Výsledek najdeme postupným použitím kalorimetrické rovnice z části a). Po prvním přelití, jak už víme, získáme teplotu $t_1 = (m_\mathrm{v}c_\mathrm{v}t_{95} + m_\mathrm{s}c_\mathrm{s}t_{20}) \,/\, (m_\mathrm{v}c_\mathrm{v} + m_\mathrm{s}c_\mathrm{s}) = 80{,}0\,^\circ\mathrm{C}$. Podobně obdržíme

$$t_2 = \frac{m_\mathrm{v}c_\mathrm{v}t_{80} + m_\mathrm{s}c_\mathrm{s}t_{20}}{m_\mathrm{v}c_\mathrm{v} + m_\mathrm{s}c_\mathrm{s}} = 68{,}0\,^\circ\mathrm{C}, \qquad t_3 = \frac{m_\mathrm{v}c_\mathrm{v}t_{68} + m_\mathrm{s}c_\mathrm{s}t_{20}}{m_\mathrm{v}c_\mathrm{v} + m_\mathrm{s}c_\mathrm{s}} = 58{,}4\,^\circ\mathrm{C},$$
$$t_4 = \frac{m_\mathrm{v}c_\mathrm{v}t_{58,4} + m_\mathrm{s}c_\mathrm{s}t_{20}}{m_\mathrm{v}c_\mathrm{v} + m_\mathrm{s}c_\mathrm{s}} = 50{,}7\,^\circ\mathrm{C}, \qquad t_5 = \frac{m_\mathrm{v}c_\mathrm{v}t_{50,7} + m_\mathrm{s}c_\mathrm{s}t_{20}}{m_\mathrm{v}c_\mathrm{v} + m_\mathrm{s}c_\mathrm{s}} = 44{,}6\,^\circ\mathrm{C}.$$

Celkem stačí čaj přelít 5×. **5 bodů**

3. Měděný drát

a) Podle vzorce ze zadání vychází $R = kL/S = 0{,}017 \cdot 500/0{,}5 = 17\,\Omega$. **2 body**

b) Pro hustotu mědi $\varrho = 8900\,\mathrm{kg/m^3}$ a průřez drátu $S = 0{,}5\,\mathrm{mm^2} = 0{,}0000005\,\mathrm{m^2}$ vychází $m = \varrho LS = 8900 \cdot 500 \cdot 0{,}0000005 = 2{,}225\,\mathrm{kg}$. **2 body**

c) Pro výpočet nejprve musíme převést naši konstantu k tak aby vyjadřovala odpor drátu o délce 1 m a průřezu $1\,\mathrm{m^2}$ – protože větší průřez podle vzorce ze zadaní znamená menší odpor, dojdeme k hodnotě $k' = 0{,}017 \cdot 10^{-6} = 0{,}000000017\,\Omega \cdot \mathrm{m}$. Ze vztahů

$$R = k'\frac{L}{S}, \qquad m = \varrho LS$$

postupně najdeme

$$L = \frac{m}{\varrho S}, \quad R = k'\frac{m}{\varrho S^2}, \quad S = \sqrt{\frac{k'm}{R\varrho}} \approx 0{,}00000019545\,\mathrm{m^2} = 0{,}195\,\mathrm{mm^2}.$$

Pro průměr drátu potom obdržíme $d = \sqrt{4S/\pi} \approx 0{,}5\,\mathrm{mm}$, pro délku dosazením

$$L = \frac{m}{\varrho S} = \sqrt{\frac{mR}{k\varrho}} = 1149{,}7\,\mathrm{m} \approx 1{,}15\,\mathrm{km}.$$

6 bodů

4. Motocyklista jede nahoru a dolů

Podle zadání označíme veličiny $C = 0{,}60$, $S = 1{,}2\,\mathrm{m^2}$, $\varrho = 1{,}20\,\mathrm{kg/m^3}$ a $m = 240\,\mathrm{kg}$.

a) Rychlost $v = 90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m/s}$. Podle zadaného vztahu vypočteme odporovou sílu $F_\mathrm{o} = \frac{1}{2}CS\varrho v^2 = 0.5 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 25^2 = 270\,\mathrm{N}$. Pro výkon pak platí $P = F_\mathrm{o} \cdot v = 6750\,\mathrm{W} = 6{,}75\,\mathrm{kW}$. **2 body**

b) Pro překonávání odporové síly na dráze $s = 1500\,\mathrm{m}$ je třeba vykonat práci $W_\mathrm{o} = F_\mathrm{o} \cdot s = 405\,\mathrm{kJ}$. Při stoupání $p = 5\,\% = 0{,}05$ se zvýší potenciální energie o $E_\mathrm{p} = mgh = mgsp = 240 \cdot 10 \cdot 1500 \cdot 0{,}05 = 180\,\mathrm{kJ}$, celkem motor musí vykonat práci $W = W_\mathrm{o} + E_\mathrm{p} = 585\,\mathrm{kJ}$ za čas $t = s/v = 1500/25 = 60\,\mathrm{s}$. Výkon motoru proto bude $P = W/t = 585\,000/60 = 9750\,\mathrm{W} = 9{,}75\,\mathrm{kW}$. **3 body**

c) Úkol lze řešit buď pomocí energie nebo porovnáním působících sil. Jede-li motocyklista z kopce, zvýší se jeho polohové energie je 180 kJ, na překonání odporové síly je však potřeba větší práce 405 kJ, rozdíl musí zajistit práce motoru, který proto musí i při jízdě z kopce působit tahovou silou. Z hlediska působících sil zjistíme složku tíhové síly rovnoběžnou s povrchem silnice – nakloněné roviny $F_{g1} = mgp = 240 \cdot 10 \cdot 0{,}05 = 120\,\mathrm{N}$. Motocykl však musí překonávat větší sílu 270 N, motor proto musí vyvinout tahovou sílu. **5 bodů**