Seminář pro řešitele FO kategorie A

Olomouc 13. 11. 2020

Téma: Příčné zvětšení čočky

FO60A1-5

5. Zvětšení úsečky

Na optické ose tenké spojné čočky s ohniskovou vzdáleností f leží malá tyčinka, jejíž rozměr je v porovnání s ohniskovou vzdáleností zanedbatelný. Vzdálenější konec tyčinky leží ve vzdálenosti $a_1 = 20$ cm od čočky. Obraz tyčinky za čočkou je $k = 9$krát větší, než tyčinka.

a) Jaká je ohnisková vzdálenost čočky?

b) Jak se změní velikost obrazu tyčinky, posuneme-li tyčinku o vzdálenost $\Delta a = 5$ cm směrem od čočky?

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty. Při řešení můžete použít přibližný vztah

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \text{ pro } |x| \ll 1.$$

5.a) Označme délku tyčinky l a délku jejího obrazu L, přičemž $l \ll a_1$ a $L \ll a_1'$. Podle zobrazovací rovnice pro vzdálenější konec tyčinky platí

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1'} = \frac{1}{f}, \tag{1}$$

pro bližší konec tyčinky pak

$$\frac{1}{a_1 - l} + \frac{1}{a_1' + L} = \frac{1}{f} = \frac{1}{a_1}\frac{1}{1 - \frac{l}{a_1}} + \frac{1}{a_1'}\frac{1}{1 + \frac{L}{a_1'}}.$$

Protože $\dfrac{1}{1 - \frac{l}{a_1}} \approx 1 + \dfrac{l}{a_1}$ a $\dfrac{1}{1 + \frac{L}{a_1'}} \approx 1 - \dfrac{L}{a_1'}$, můžeme napsat

$$\frac{1}{a_1}\left(1 + \frac{l}{a_1}\right) + \frac{1}{a_1'}\left(1 - \frac{L}{a_1'}\right) \approx \frac{1}{f}. \tag{2}$$

Odečtením rovnic (2) a (1) dostaneme $\dfrac{l}{a_1^2} - \dfrac{L}{a_1'^2} \approx 0$. Odtud $k = \dfrac{L}{l} = \left(\dfrac{a_1'}{a_1}\right)^2$ a $a_1' = a_1\sqrt{k}$. Dosazením do rovnice (1) pak

$$f = \frac{a_1\sqrt{k}}{\sqrt{k} + 1} = 15 \text{ cm.}$$

5 bodů

b) Při nových vzdálenostech $a_2 = a_1 + \Delta a$ a $a_2' = \dfrac{a_2 f}{a_2 - f}$ a nové délce obrazu L_1 bude nyní pro zvětšení platit:

$$k_1 = \frac{L_1}{l} = \left(\frac{a_2'}{a_2}\right)^2 = \left(\frac{f}{a_2 - f}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\dfrac{a_1\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}}{a_1 + \Delta a - \dfrac{a_1\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}}\right)^2 = \left[\frac{a_1\sqrt{k}}{(a_1+\Delta a)(\sqrt{k}+1) - a_1\sqrt{k}}\right]^2.$$

Vztah mezi velikostmi obrazů tyčinky

$$n = \frac{L_1}{L} = \frac{k_1}{k} = \left[\frac{a_1}{(a_1+\Delta a)(\sqrt{k}+1) - a_1\sqrt{k}}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{\left[\left(1 + \dfrac{\Delta a}{a_1}\right)(\sqrt{k}+1) - \sqrt{k}\right]^2} = \frac{1}{4}.$$

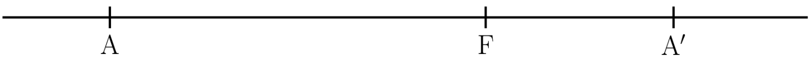
Délka obrazu tyčinky se tedy zmenší 4krát. **5 bodů**

FO58A3-4

4. Kde byla čočka

V archivu byl nalezen obrázek, na němž byla na optické ose zakreslena poloha zdroje bodového světla A, jeho obrazu A’ a jednoho z ohnisek F tenké čočky. Poloha čočky ale na obrázku chybí.

Kde byla umístěna čočka, která na obrázku chybí? Zvažte všechny možnosti. Řešte obecně, pak pro hodnoty: $\overline{AA'} = l = 8$ cm, $\overline{AF} = d = 6$ cm.



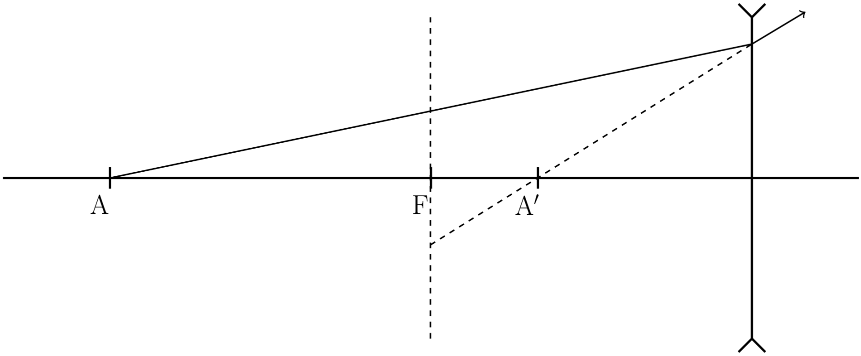
4. Jsou celkem 4 možnosti:

1. Čočka je rozptylka. V takovém případě leží čočka za bodem A’ a dává neskutečný obraz.

Vzdálenost zdroje od čočky označme x. Podle zobrazovací rovnice $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-l} = -\frac{1}{x-d}$. Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 2lx + ld = 0$. Čočka se nachází ve vzdálenosti $x = l + \sqrt{l\,(l-d)} = 12$ cm od zdroje.

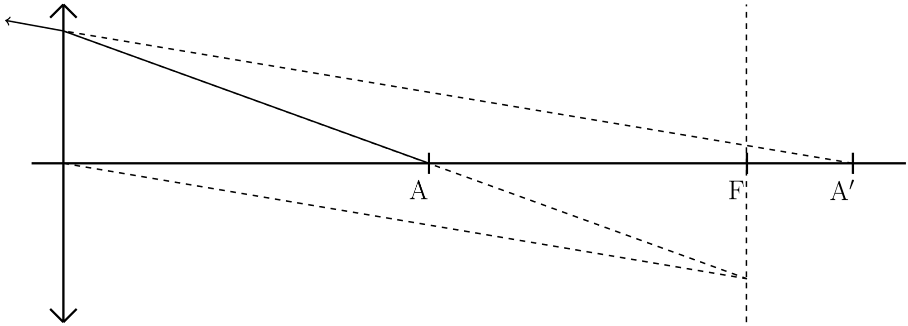
2,5 bodu

Úlohu lze řešit rovněž geometrickou konstrukcí:



2. Čočka je spojka, která leží před bodem A. Pak čočka dává neskutečný obraz.

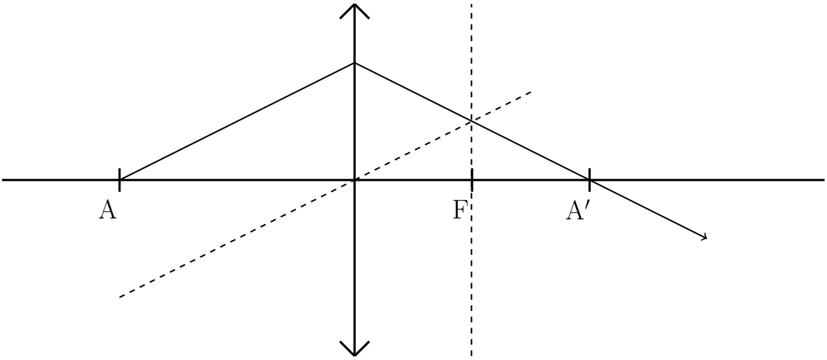
Podle zobrazovací rovnice $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+l} = \dfrac{1}{x+d}$. Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 = ld$. Čočka se nachází ve vzdálenosti $x = \sqrt{ld} = 6{,}9$ cm před zdrojem.



2,5 bodu

3. Čočka je spojka, F je obrazové ohnisko. Obraz vytvořený čočkou je skutečný.

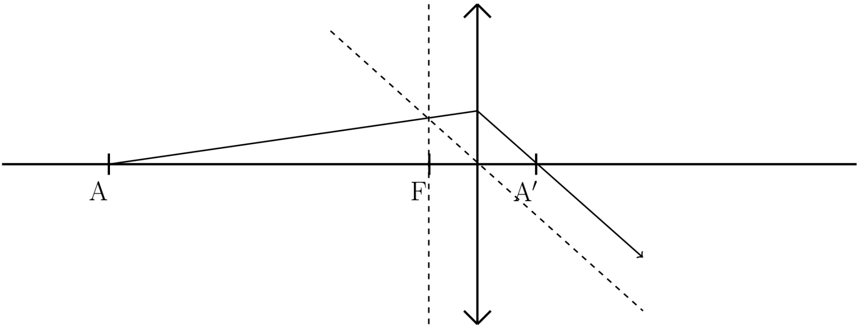
Podle zobrazovací rovnice $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{l-x} = \dfrac{1}{d-x}$. Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 2lx + ld = 0$. Čočka se nachází ve vzdálenosti $x = l - \sqrt{l\,(l-d)} = 4$ cm od zdroje.



2,5 bodu

4. Čočka je spojka, F je předmětové ohnisko. Obraz vytvořený spojkou je skutečný.

Podle zobrazovací rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} = \frac{1}{x-d}$. Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 = ld$. Čočka se nachází ve vzdálenosti $x = \sqrt{ld} = 6{,}9$ cm od zdroje.



2,5 bodu

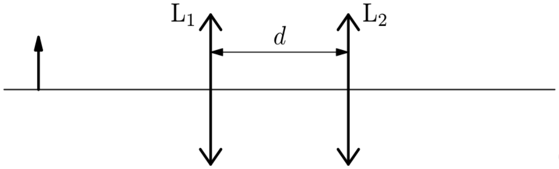
FO47A2-4

4. Optická soustava

Dvě tenké spojky L_1, L_2 o ohniskových vzdálenostech f_1, f_2 tvoří opticky centrovanou soustavu, pomocí které zobrazujeme reálný předmět umístěný v různých polohách před první čočkou (obr. 2).

a) Jaká je vzdálenost d čoček, je-li velikost výsledného obrazu konstantní, tj. nezávislá na vzdálenosti předmětu od první čočky? Jaké je příčné zvětšení výsledného obrazu?

b) Jaká musí být vzdálenost předmětu od první čočky, aby výsledný obraz byl reálný?

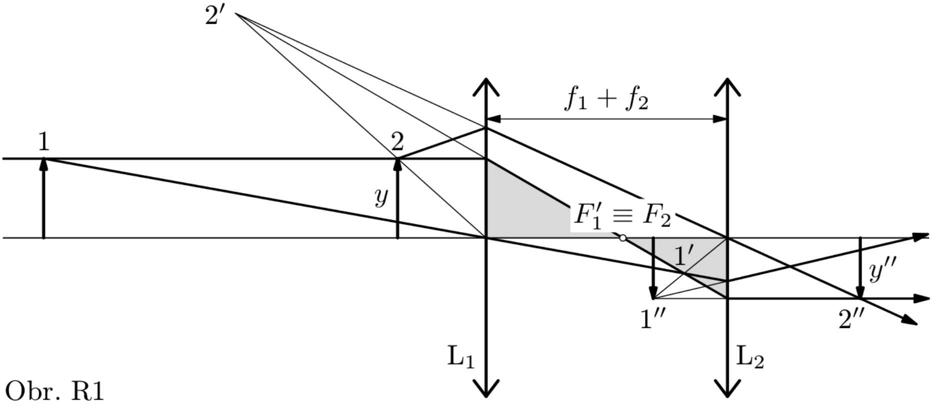


Obr. 2

4. a) Pro různé polohy předmětu můžeme při grafické konstrukci obrazu používat týž paprsek jdoucí vrcholem předmětu rovnoběžně s optickou osou soustavy. Ten se po průchodu první spojkou láme do jejího obrazového ohniska F_1' a po průchodu druhou spojkou prochází vrcholem výsledného obrazu. Při posouvání předmětu se mění i poloha výsledného obrazu, ale jeho velikost se podle předpokladu úlohy nemění. To znamená, že uvažovaný paprsek jde po průchodu druhou spojkou rovnoběžně s optickou osou soustavy a před dopadem na druhou spojku prochází jejím předmětovým ohniskem F_2 (obr. R1). Platí tedy

$$F_1' \equiv F_2\,, \qquad d = f_1 + f_2\,.$$

Jedná se o teleskopickou soustavu. Z podobnosti trojúhelníků vytvořených uvažovaným paprskem, optickou osou a oběma čočkami určíme příčné zvětšení výsledného obrazu $\beta = \dfrac{y''}{y} = -\dfrac{f_2}{f_1}$.



Obr. R1

5 bodů

b) Ze zobrazovací rovnice první spojky odvodíme

$$a_1' = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\,.$$

Má-li být výsledný obraz skutečný, nesmí obraz vytvořený první spojkou ležet mezi druhou spojkou a jejím předmětovým ohniskem (jako např. bod 1′ na obr. R1). Obraz vytvořený první spojkou nikdy nevznikne mezi ní a jejím obrazovým ohniskem. Jsou tyto možnosti:

1) $\quad a_1' < 0\,, \quad$ pak $\quad 0 < a_1 < f_1\,,$

2) $\quad a_1' > d = f_1 + f_2\,,$ pak

$$a_1 > f_1\,, \quad a_1 f_1 > (f_1 + f_2)(a_1 - f_1) = a_1 f_1 + a_1 f_2 - f_1^2 - f_1 f_2\,,$$

$$f_1 < a_1 < \frac{f_1(f_1+f_2)}{f_2}\,.$$

3) $a_1 = f_1$. Pak $a_1' \to \infty$, $a_2 = f_2$. Vznikne reálný obraz v obrazové ohniskové rovině druhé čočky.

Závěr: Aby vznikl reálný výsledný obraz. musí platit

$$0 < a_1 < \frac{f_1(f_1+f_2)}{f_2}.$$

5 bodů

Jiné řešení:

a) Obraz vytvořený první spojkou je předmětem pro druhou spojku (reálným nebo virtuálním). Platí

$$a_1' = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\,, \quad a_2 = d - a_1'\,.$$

Vyjádříme příčné zvětšení při zobrazení jednotlivými čočkami a celou soustavou:

$$\beta_1 = -\frac{f_1}{a_1 - f_1}\,, \qquad \beta_2 = -\frac{f_2}{a_2 - f_2}\,,$$

$$\beta = \beta_1\beta_2 = \frac{f_1 f_2}{(a_1 - f_1)\left(d - \dfrac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} - f_2\right)} = \frac{f_1 f_2}{a_1(d - f_1 - f_2) - df_1 + f_1 f_2}\,.$$

Nemá-li celkové příčné zvětšení záviset na a_1, musí být $d - f_1 - f_2 = 0$. Pak

$$d = f_1 + f_2$$

a celkové příčné zvětšení je

$$\beta = \frac{f_1 f_2}{-(f_1+f_2)f_1 + f_1 f_2} = -\frac{f_2}{f_1}\,.$$

5 bodů

b) Poloha výsledného obrazu je

$$a_2' = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2} = \frac{\left(d - \dfrac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\right) f_2}{d - \dfrac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} - f_2} =$$

$$= \frac{[(f_1+f_2)(a_1-f_1) - a_1 f_1]f_2}{(f_1+f_2)(a_1-f_1) - a_1 f_1 - f_2(a_1 - f_1)} = \frac{[a_1 f_2 - f_1(f_1+f_2)]f_2}{-f_1^2} > 0\,.$$

Z toho

$$a_1 f_2 - f_1(f_1+f_2) < 0\,, \qquad a_1 < \frac{f_1(f_1+f_2)}{f_2}\,.$$

5 bodů